

## Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Een rij

#### 1 maximumscore 4

- Voor de limiet geldt:  $u = \frac{1}{2-u}$  1
- $2u - u^2 = 1$  1
- Dit schrijven als  $u^2 - 2u + 1 = 0$  1
- De (enige) oplossing:  $u = 1$  1

#### 2 maximumscore 5

- $n$  vervangen door  $n-1$  in  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$  geeft  $u_{n-1} = \frac{n}{n+1}$  1
- Dit en  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$  invullen in  $u_n = \frac{1}{2-u_{n-1}}$  geeft  $\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}$  1
- Dit schrijven als  $\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{2(n+1)-n}$  2
- Dit herleiden tot  $\frac{n+1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$  (en dus voldoet  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$  voor elke  $n \geq 1$  aan de gegeven recursievergelijking) 1
- of
- $n$  vervangen door  $n-1$  in  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$  geeft  $u_{n-1} = \frac{n}{n+1}$  1
- Dit invullen in  $u_n = \frac{1}{2-u_{n-1}}$  geeft  $u_n = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}}$  1
- Dit schrijven als  $u_n = \frac{n+1}{2(n+1)-n}$  2
- Dit herleiden tot  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$  (en dus voldoet  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$  voor elke  $n \geq 1$  aan de gegeven recursievergelijking) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Onnodig ingewikkeld?

#### 3 maximumscore 4

- Uitgerekend moet worden het tijdstip  $t$  waarbij  $S = \frac{168,0}{170,0}$  ( $\approx 0,9882$ ) 1
- Beschrijven hoe de vergelijking  $\frac{168,0}{170,0} = \ln(-0,00216t + 2,7183)$  opgelost kan worden 1
- De oplossing van de vergelijking:  $t \approx 14,73$  uur 1
- Het antwoord: na (ongeveer) 884 minuten (ofwel 14 uur en 44 min.) 1

#### 4 maximumscore 6

- $S' = \frac{-0,00216}{-0,00216t + 2,7183}$  ( $= \frac{0,00216}{0,00216t - 2,7183}$ ) 2
- $S'' = -\frac{0,00216^2}{(0,00216t - 2,7183)^2}$  2
- (omdat  $0,00216^2$  en  $(0,00216t - 2,7183)^2$  beide voor elke waarde van  $t$  positief zijn, geldt:)  $S''$  is voor elke waarde van  $t$  negatief 1
- Dus er is sprake van toenemende daling 1

#### 5 maximumscore 4

- Voor het (positieve) verschil  $V$  dat de formules kunnen opleveren geldt:  
 $V = \ln(-0,00216t + 2,7183) - (-0,0008t + 1,0000)$  1
- Beschrijven hoe het maximum van  $V$  gevonden kan worden 1
- Dit maximum is  $2,9551 \cdot 10^{-5}$  1
- Het maximale verschil voor de lengte van meneer Jansen is dus  
 $170,0 \cdot 2,9551 \cdot 10^{-5} \approx 0,0050$  cm (of 0,005 cm) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Gelijkzijdige driehoeken

**6 maximumscore 3**

- $\angle ACB = 60^\circ$ , dus  $\angle ACD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ; (*gelijkbenige driehoek, hoekensom driehoek*), *gestrekte hoek* 1
- $\angle ACD + \angle AED = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$  1
- Dus is  $ACDE$  een koordenvierhoek; *omgekeerde koordenvierhoekstelling* 1

**7 maximumscore 5**

- $ACDE$  is een koordenvierhoek, dus  $ACDE$  heeft een omgeschreven cirkel 1
  - $\angle DAE = \angle DCE$ ; *constante hoek* 1
  - $\angle DCE = \angle DBA = 60^\circ$ ; *F-hoeken*, (*gelijkbenige driehoek, hoekensom driehoek*) 1
  - Hieruit volgt  $\angle DAE = 60^\circ$  1
  - $\angle AED = \angle DAE = 60^\circ$  geeft  $\angle ADE = 60^\circ$ , dus driehoek  $EAD$  is gelijkzijdig; *hoekensom driehoek, (gelijkbenige driehoek)* 1
- of
- $ACDE$  is een koordenvierhoek, dus  $ACDE$  heeft een omgeschreven cirkel 1
  - $\angle ADE = \angle ACE$ ; *constante hoek* 1
  - $\angle ACE = \angle BAC = 60^\circ$ ; *Z-hoeken*, (*gelijkbenige driehoek, hoekensom driehoek*) 1
  - Hieruit volgt  $\angle ADE = 60^\circ$  1
  - $\angle AED = \angle ADE = 60^\circ$  geeft  $\angle DAE = 60^\circ$ , dus driehoek  $EAD$  is gelijkzijdig; *hoekensom driehoek, (gelijkbenige driehoek)* 1

**8 maximumscore 4**

- Het tekenen van de lijn door  $C$  evenwijdig aan  $AB$  1
  - Het tekenen van  $M$ , het snijpunt van deze lijn met  $m$  1
  - De tekening van driehoek  $AKM$  1
  - Een toelichting, waarbij verwezen wordt naar de stam van vraag 6 en 7 1
- of
- Het tekenen van de lijn door  $B$  evenwijdig aan  $AC$  1
  - Het tekenen van  $M$ , het snijpunt van deze lijn met  $m$  1
  - De tekening van driehoek  $AKM$  1
  - Een toelichting, waarbij verwezen wordt naar de stam van vraag 6 en 7 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

## Evenwijdige lijnen

### 9 maximumscore 8

- De oppervlakte van het gebied ingesloten door de grafiek van  $f$ , de  $x$ -as en de  $y$ -as is  $\int_0^4 (4 - \frac{1}{4}x^2) dx$  1
- Een primitieve van  $4 - \frac{1}{4}x^2$  is  $4x - \frac{1}{12}x^3$  1
- $\left[4x - \frac{1}{12}x^3\right]_0^4 = 10\frac{2}{3}$  1
- De oppervlakte van het bovenste vlakdeel is  $\frac{1}{2}c^2 - 10\frac{2}{3}$  1
- De oppervlakte van het onderste vlakdeel is  $10\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 2\frac{2}{3}$  1
- Beide oppervlakten zijn gelijk als  $\frac{1}{2}c^2 - 10\frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$ , dus als  $\frac{1}{2}c^2 = 13\frac{1}{3}$  ofwel  $c^2 = 26\frac{2}{3} = \frac{80}{3}$  2
- $c = \sqrt{\frac{80}{3}}$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

## Een leugendetector

### 10 maximumscore 3

- De verwachtingswaarde is  $1 \cdot 0,88 + 4 \cdot 0,25$  2
- Het antwoord: 1,88 1

### 11 maximumscore 5

- De kans dat de leugenaar als leugenaar wordt aangewezen en de waarheidsprekers niet is  $0,88 \cdot 0,75^4 \approx 0,2784$  2
- De kans dat de leugenaar niet als leugenaar wordt aangewezen en één van de waarheidsprekers wel is  $0,12 \cdot 4 \cdot 0,25 \cdot 0,75^3 \approx 0,0506$  2
- Het antwoord: ongeveer 0,33 (of ongeveer 33%) 1

Vraag	Antwoord	Scores
<b>12</b>	<b>maximumscore 5</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het aantal waarheidsprekers die als leugenaar worden aangewezen, <math>X</math>, is binomiaal verdeeld met <math>n = 10</math> en <math>p</math> is de kans dat een waarheidspreker als leugenaar wordt aangewezen</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Gevraagd wordt de grootste waarde van <math>x</math> zo dat <math>P(X \geq 1   n = 10, p = x) \leq 0,50</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Beschrijven hoe <math>P(X \geq 1   n = 10, p = x) = 0,50</math> opgelost kan worden</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De oplossing van deze vergelijking is <math>x \approx 0,06697</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De grootste waarde van <math>x</math> die aan de ongelijkheid voldoet, is ongeveer 0,066 (of 0,06)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Als <math>p</math> de kans is dat een waarheidspreker als leugenaar wordt aangewezen, dan is de kans dat geen van de waarheidsprekers aangewezen wordt als leugenaar <math>(1 - p)^{10}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Gevraagd wordt de grootste waarde van <math>p</math> zo dat <math>1 - (1 - p)^{10} \leq 0,50</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Beschrijven hoe de vergelijking <math>1 - (1 - p)^{10} = 0,50</math> opgelost kan worden</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De oplossing van deze vergelijking is <math>p \approx 0,06697</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De grootste waarde van <math>p</math> die aan de ongelijkheid voldoet, is ongeveer 0,066 (of 0,06)</li> </ul>	1

## Ellips in een cirkel

<b>13</b>	<b>maximumscore 3</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Het tekenen van de middelloodlijn van <math>FA</math> en het snijpunt van deze lijn met <math>MA</math></li> </ul>	2
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Toelichting: het gevraagde punt ligt op <math>MA</math> en heeft gelijke afstanden tot <math>F</math> en de cirkel, dus ligt op de middelloodlijn van <math>FA</math></li> </ul>	1
<b>14</b>	<b>maximumscore 4</b>	
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>BF = BA</math>, want <math>B</math> ligt op de ellips</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\angle BFA = \angle BAF</math>; <i>gelijkbenige driehoek</i></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\angle FBA = 180^\circ - 2 \cdot \angle BAF</math>; <i>hoekensom driehoek</i></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\angle MBF = 180^\circ - \angle FBA</math>, dus <math>\angle MBF = 2 \cdot \angle BAF = 2 \cdot \angle MAF</math>; <i>gestrekte hoek</i></li> </ul>	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

### Bebuikte rechthoeken

#### 15 maximumscore 6

- De oppervlakte van elke cirkelsector is  $\frac{t}{2\pi} \cdot \pi \cdot 4^2 = 8t$  2
- Elke driehoek heeft oppervlakte  $\frac{1}{2} \cdot 4 \cos t \cdot 4 \sin t$  2
- $O(t) = 2 \cdot 8t + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cos t \cdot 4 \sin t = 16t + 48 \cdot \sin t \cdot \cos t$  1
- Dus  $O(t) = 16t + 24 \cdot 2 \sin t \cos t = 16t + 24 \cdot \sin 2t$  1

#### 16 maximumscore 4

- De hoogte is 4, dus  $\sin t = \frac{2}{4}$  1
- Dit geeft  $t = \frac{1}{6}\pi$  1
- De oppervlakte is dan  $2 \frac{2}{3}\pi + 12\sqrt{3}$  2

#### 17 maximumscore 7

- $O'(t) = 16 + 48 \cdot \cos 2t$  2
- $O$  is maximaal als  $\cos 2t = -\frac{1}{3}$  1
- Dit geeft  $1 - 2\sin^2 t = -\frac{1}{3}$  en dus  $\sin^2 t = \frac{2}{3}$  2
- Hieruit volgt (omdat  $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ )  $\sin t = \sqrt{\frac{2}{3}}$  1
- De hoogte is  $8 \cdot \sin t = 8 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} (= \frac{8}{3}\sqrt{6})$  1