Een benadering van een nulpunt

Voor elke positieve startwaarde x_0 is een rij x_0, x_1, x_2, … gegeven door de volgende recursievergelijking: $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

Deze recursievergelijking kunnen we ook schrijven als $x_{n+1} = g(x_n)$, waarbij $g(x) = \frac{1}{2}x + \dfrac{1}{x}$ met $x > 0$.

In de figuur op de uitwerkbijlage zijn de grafiek van g en de lijn $y = x$ getekend. In deze figuur is op de x-as een getal x_0 gekozen.

3p **1** Teken in deze figuur met behulp van een webgrafiek de bijbehorende plaatsen van x_1 en x_2 op de x-as.

De rij x_0, x_1, x_2, … convergeert. De grafiek van g heeft één top.

5p **2** Toon aan dat de limiet van de rij x_0, x_1, x_2, … exact gelijk is aan de x-coördinaat van de top van de grafiek van g.

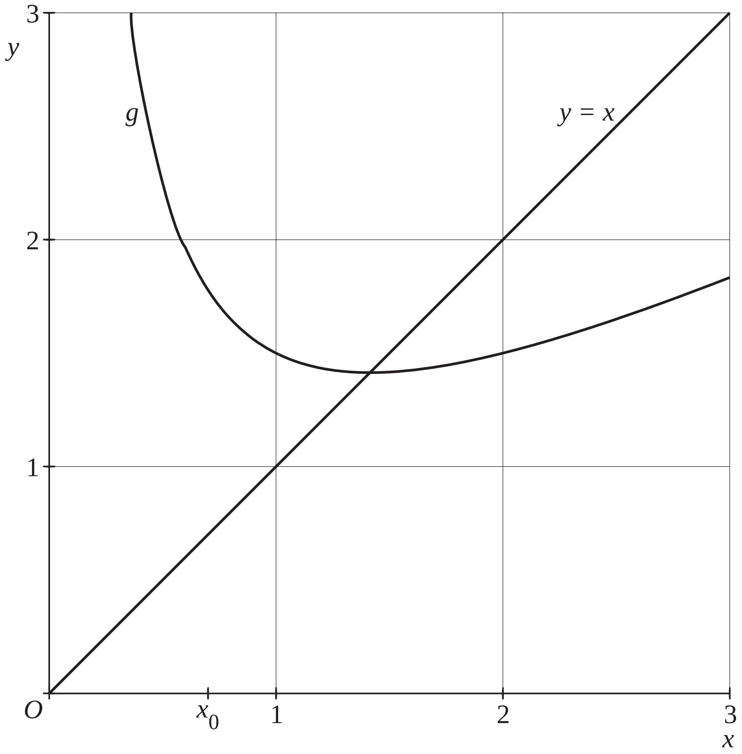
Een nulpunt van een functie f kan in het algemeen snel benaderd worden met de recursievergelijking $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ bij een geschikte keuze van x_0.

Deze benaderingsmethode noemt men de methode van Newton-Raphson.
Passen we deze methode toe voor een benadering van het nulpunt $\sqrt{2}$ van $f(x) = x^2 - 2$ dan volgt hieruit de gegeven recursievergelijking $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \dfrac{1}{x_n}$.

4p **3** Toon aan dat deze laatste vergelijking volgt uit de vergelijking $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

uitwerkbijlage

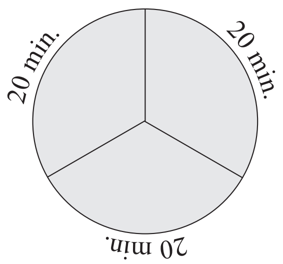
1



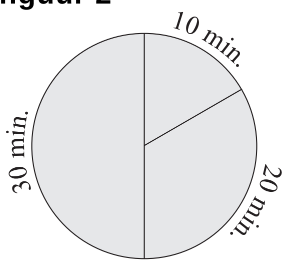
Wachten op de bus

Bij een evenement worden mensen vanaf een opstapplaats per bus vervoerd naar de ingang van de evenementenhal. Voortdurend pendelen drie bussen tussen de opstapplaats en de ingang. De reistijd van een bus (van de opstapplaats naar de ingang en terug) is gemiddeld 60 minuten.
In figuur 1 is de situatie weergegeven dat na elke 20 minuten een bus vertrekt. Neem aan dat voor mensen die met de bus mee willen, elk aankomsttijdstip op de opstapplaats even waarschijnlijk is. Een bezoeker aan het evenement komt dus met kans $\frac{1}{3}$ in elk van de drie tijdsintervallen tussen de vertrekkende bussen aan en voor elk van die tijdsintervallen is de te verwachten wachttijd 10 minuten. De verwachtingswaarde van de wachttijd is dus
$\frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot 10 = 10$ minuten.
In figuur 2 is de situatie weergegeven dat de bussen vertrekken met tussenpozen van 10, 20 en 30 minuten.

figuur 1



figuur 2



4p **4** Bereken in de situatie van figuur 2 de verwachtingswaarde van de wachttijd voor een bezoeker aan het evenement.

De reistijd van de bussen is normaal verdeeld met een gemiddelde van 60 minuten. Het kan natuurlijk voorkomen dat een rit wat langer of wat korter duurt. Men vindt dit acceptabel zo lang niet meer dan 10% van de ritten langer duurt dan 65 minuten.

4p **5** Bereken de maximale standaardafwijking van de reistijd van een bus waarbij aan deze eis voldaan is.

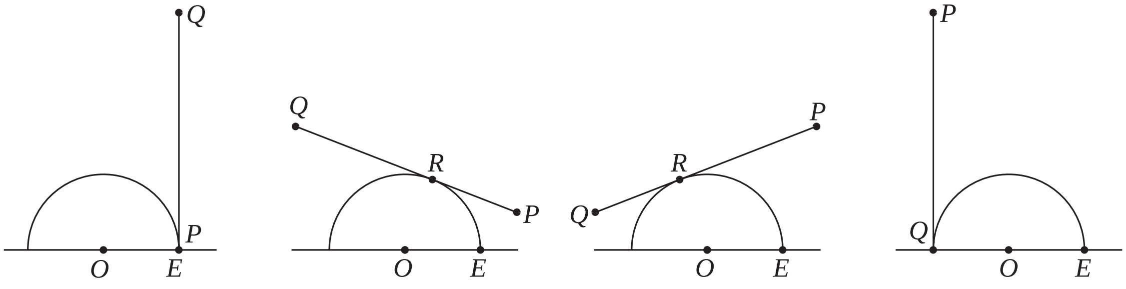
Veronderstel dat de reistijden van de bussen onafhankelijk zijn en alle een standaardafwijking van 3,4 minuten hebben.
We bekijken twee opeenvolgende bussen.

4p **6** Bereken de kans dat de eerste bus meer dan 65 minuten over de rit doet en de tweede bus minder dan 55 minuten.

Een buiteling

Een lijnstuk PQ met een lengte van π meter buitelt over een halve cirkel waarvan de straal OE 1 meter is. In figuur 1 zijn de beginstand, twee tussenstanden en de eindstand getekend. Het punt waarin PQ raakt aan de halve eenheidscirkel noemen we R. Dus op elk moment staat PQ loodrecht op OR en is het lijnstuk PR even lang als de cirkelboog ER.

figuur 1

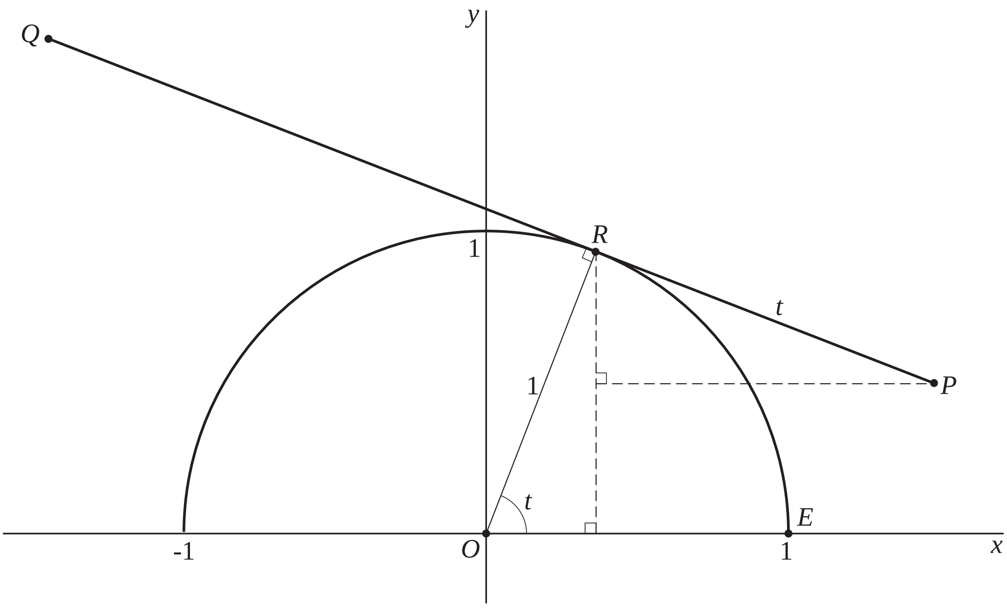


beginstand: $R = P$ eindstand: $R = Q$

Het lijnstuk buitelt zó dat R met snelheid 1 m/s over de halve cirkel beweegt. Op tijdstip 0 begint PQ aan de buiteling; dan is het punt P nog in het punt E.

Er wordt een rechthoekig assenstelsel aangebracht zo dat O het punt (0, 0) is en E het punt (1, 0). Zie figuur 2.

figuur 2



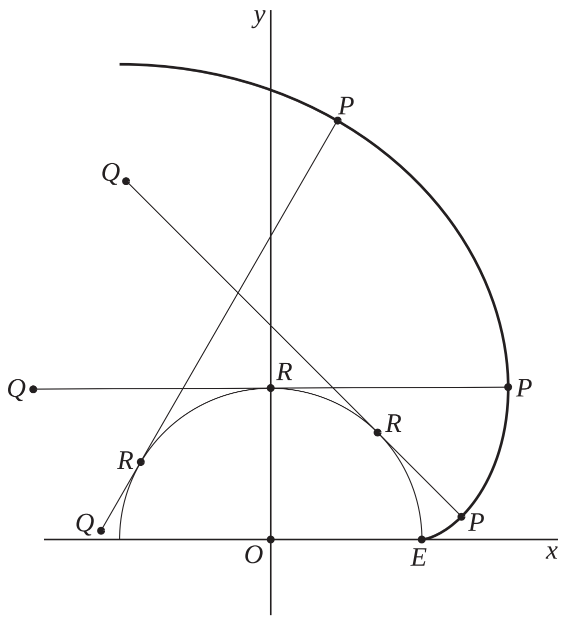
In figuur 2 is het lijnstuk PQ op tijdstip t getekend voor een waarde van t tussen 0 en π. Omdat de straal van de halve cirkel 1 m is en de snelheid van R gelijk is aan 1 m/s, geldt $\angle EOR = t$ (rad) en $RP = t$ (m).
Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

Voor de coördinaten van P geldt: $\begin{cases} x(t) = \cos(t) + t \cdot \sin(t) \\ y(t) = \sin(t) - t \cdot \cos(t) \end{cases}$ met $0 \le t \le \pi$.

5p **7** Toon de juistheid aan van de formule voor $x(t)$ met $0 \le t \le \frac{1}{2}\pi$.

In figuur 3 zijn drie standen van PQ getekend en de gehele baan van P.

figuur 3



De grootte van de snelheid in m/s van het punt P na t seconden noemen we $v(t)$. Er geldt: $v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$.

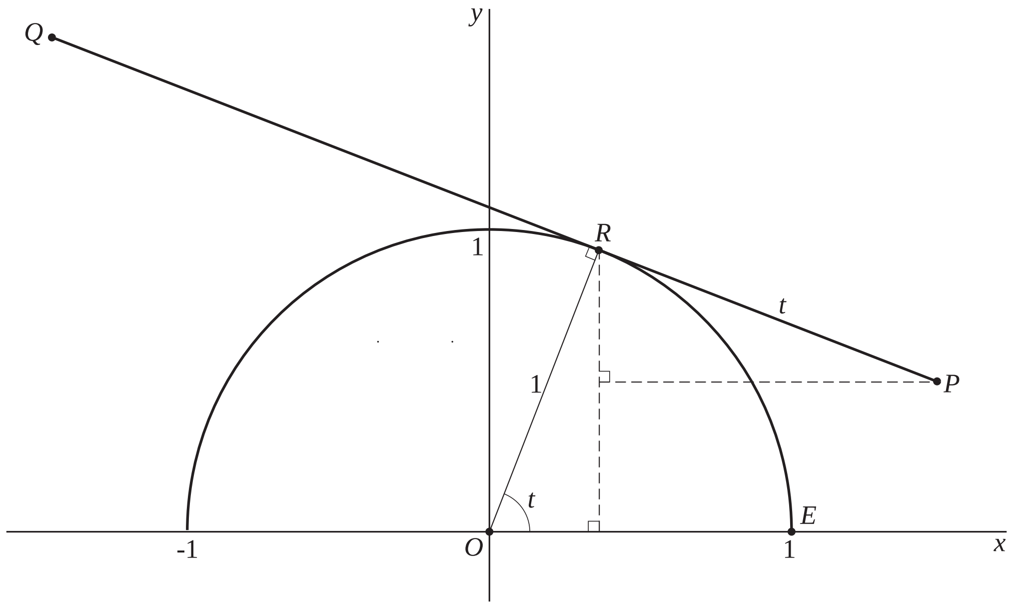
Hieruit volgt: $v(t) = t$.

6p **8** Toon dit aan.

3p **9** Bereken exact de lengte van de baan van P.

uitwerkbijlage

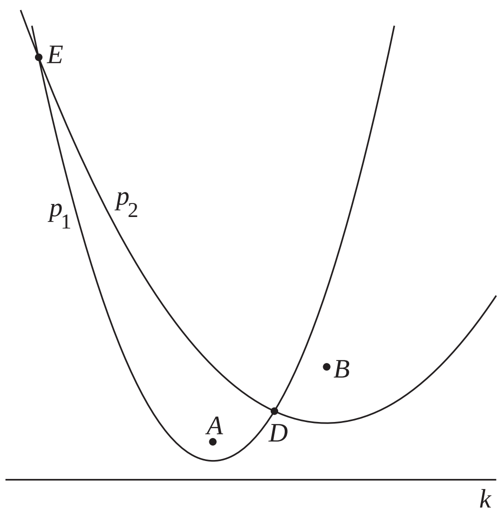
7



Twee parabolen met een gemeenschappelijke richtlijn

In figuur 1 zijn een lijn k en twee punten A en B getekend. Verder zijn getekend de parabool p_1 met brandpunt A en richtlijn k en de parabool p_2 met brandpunt B en richtlijn k. De parabolen snijden elkaar in de punten D en E.
Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 1



D en E liggen op de middelloodlijn van AB.

3p **10** Bewijs dit voor punt D.

Wanneer we het vlak verdelen tussen punt A, punt B en lijn k volgens het naaste-buurprincipe, spelen onder andere de parabolen p_1 en p_2 daarbij een rol.

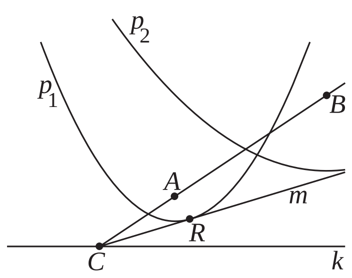
3p **11** Geef in de figuur op de uitwerkbijlage met verschillende kleuren of arceringen deze verdeling van het vlak aan.

Lijn AB snijdt lijn k in punt C. De lijn m gaat door C en raakt de parabool p_1 in punt R. Zie figuur 2. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

Er geldt: m is de bissectrice van een hoek tussen de lijnen k en AB.

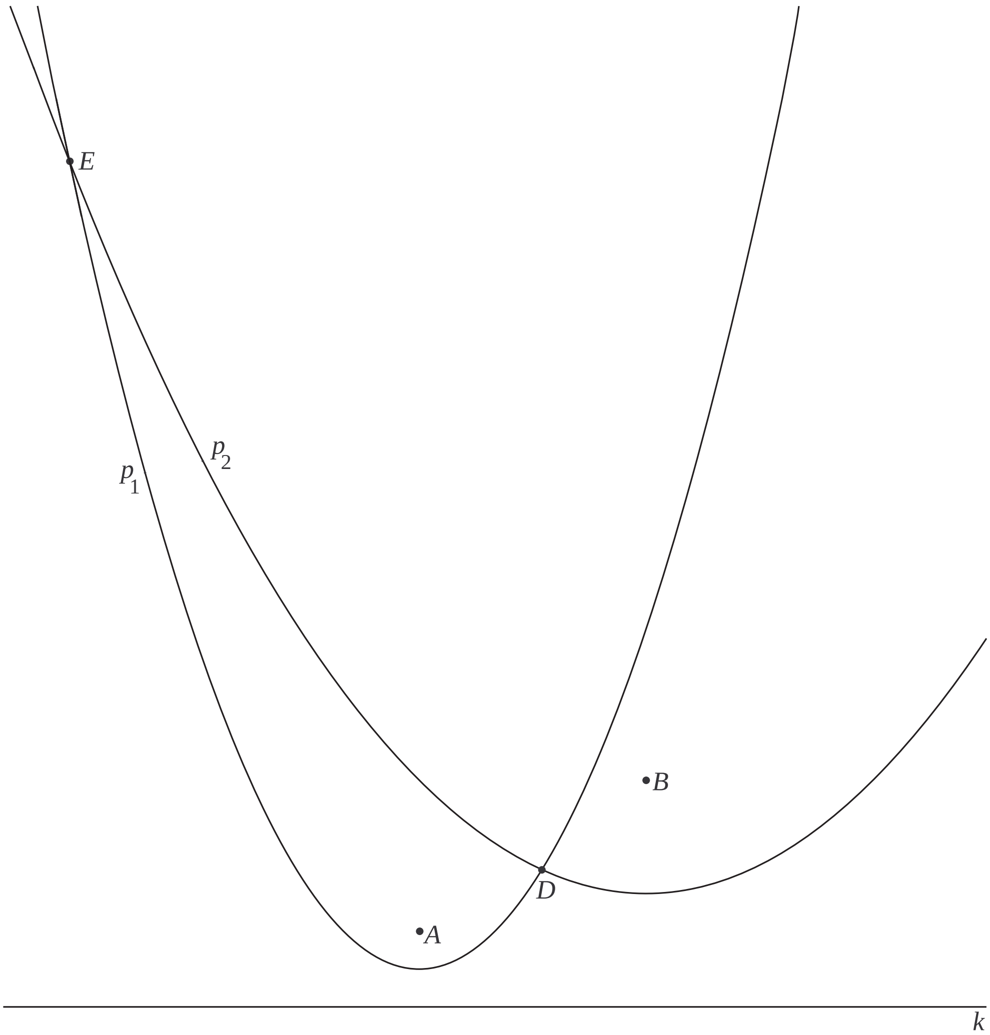
4p **12** Bewijs dit.

figuur 2

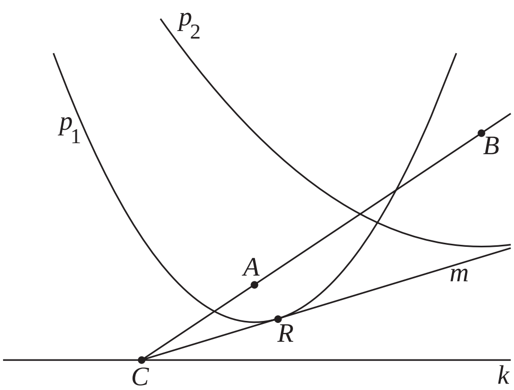


uitwerkbijlage

11



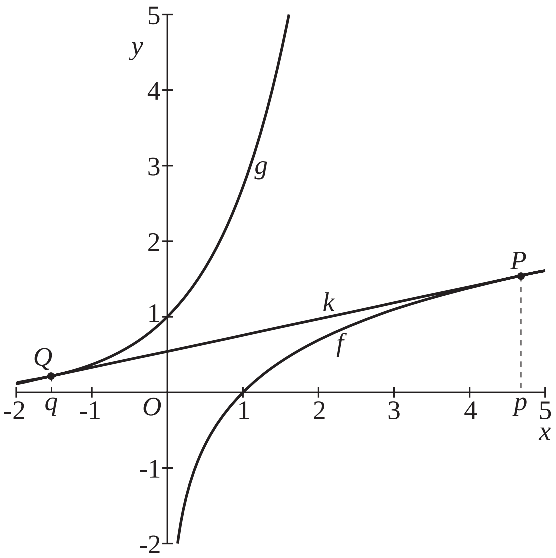
12



Een gemeenschappelijke raaklijn

De functies *f* en *g* zijn gegeven door $f(x)=\ln(x)$ en $g(x)=\mathrm{e}^x$. In figuur 1 zijn de grafieken van beide functies getekend. De lijn *k* is een gemeenschappelijke raaklijn aan de grafieken van *f* en *g*. Het punt waarin *k* de grafiek van *f* raakt, noemen we $P(p, \ln(p))$, met $p>0$. Het punt waarin *k* de grafiek van *g* raakt, noemen we $Q(q, \mathrm{e}^q)$, met $q<0$.

figuur 1



Omdat *k* raaklijn is in punt *P* aan de grafiek van *f*, is $y=\frac{1}{p}x+\ln(p)-1$ een formule voor *k*.

3p **13** Toon dit aan.

Omdat *k* raaklijn is in punt *Q* aan de grafiek van *g*, is ook $y=\mathrm{e}^q x+\mathrm{e}^q(1-q)$ een formule voor *k*.

Uit de twee formules voor *k* kunnen we twee verbanden tussen *p* en *q* afleiden: $\mathrm{e}^q=\dfrac{1}{p}$ (oftewel $p=\mathrm{e}^{-q}$) en $\mathrm{e}^q(1-q)=\ln(p)-1$.

Uit deze twee verbanden volgt dat *q* voldoet aan de vergelijking $\mathrm{e}^q=\dfrac{q+1}{q-1}$.

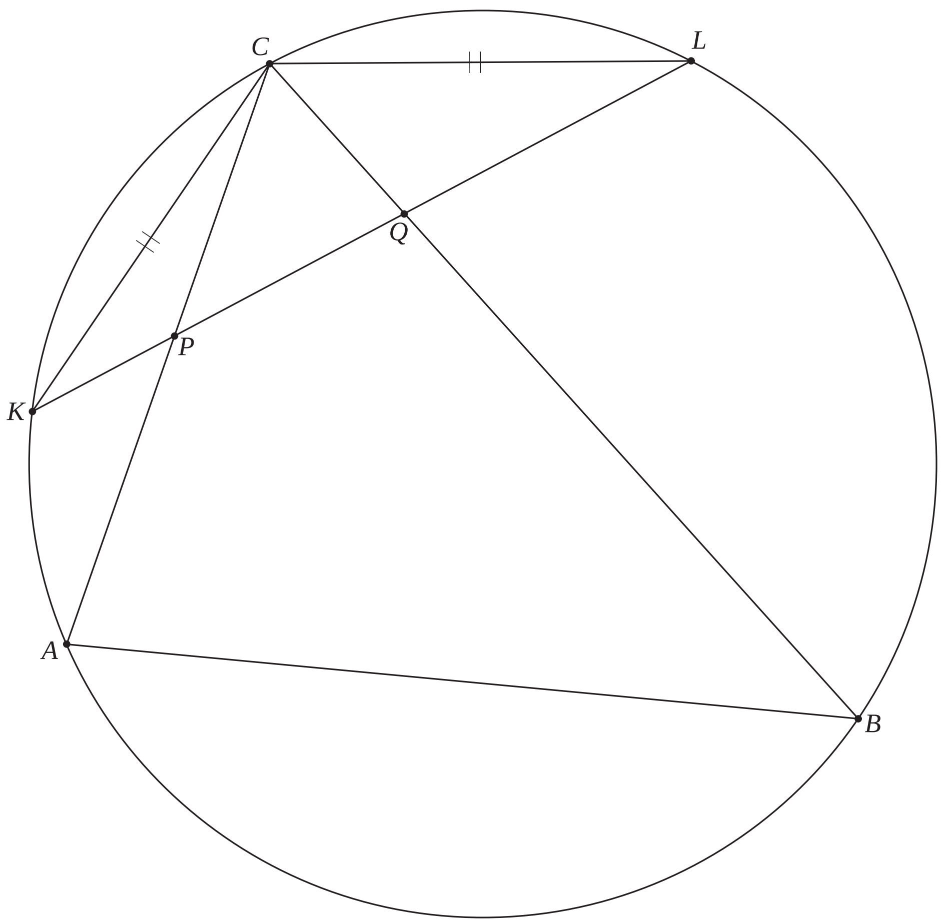
3p **14** Toon aan dat deze laatste vergelijking volgt uit de twee genoemde verbanden tussen *p* en *q*.

4p **15** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de richtingscoëfficiënt van de gemeenschappelijke raaklijn *k*.

Een koordenvierhoek?

Gegeven is driehoek ABC met zijn omgeschreven cirkel. Aan weerskanten van C liggen de punten K en L op de omgeschreven cirkel zo dat $CK = CL$. De koorde KL snijdt de zijden AC en BC in P en Q.
Zie figuur 1. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



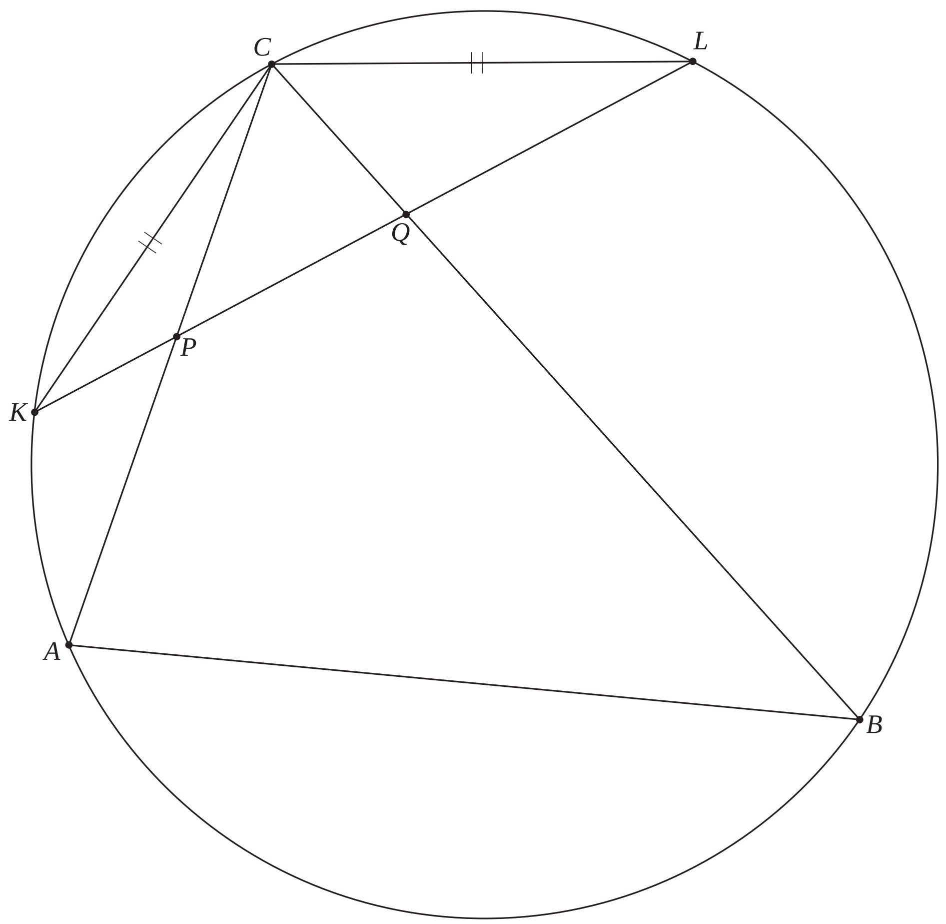
Er geldt: $\angle BAC = \angle QCL + \angle CLK$.

5p **16** Bewijs dit.

4p **17** Bewijs dat vierhoek $ABQP$ een koordenvierhoek is.

uitwerkbijlage

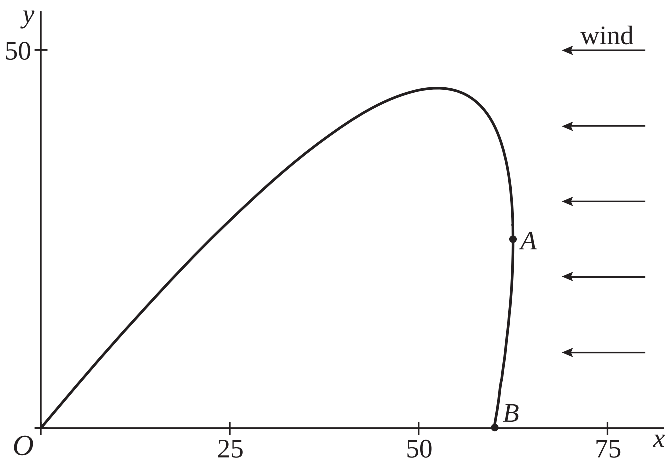
16, 17



Een vuurpijl met tegenwind

Een vuurpijl wordt vanaf de grond schuin weggeschoten. Door tegenwind beschrijft de vuurpijl een baan zoals die in figuur 1 getekend is.

figuur 1



In deze figuur is een assenstelsel aangebracht met de x-as op de grond tegen de windrichting in en de y-as verticaal. In O wordt de vuurpijl afgeschoten. In B komt hij weer op de grond.
A is het punt van de baan dat het meest naar rechts ligt.
We gebruiken voor de baan de volgende formules:
voor het eerste deel OA van de baan geldt $y = 2x - 100 + 4 \cdot \sqrt{625 - 10x}$,
voor het tweede deel AB van de baan geldt $y = 2x - 100 - 4 \cdot \sqrt{625 - 10x}$,
met x en y in meter.

7p **18** Bereken op algebraïsche wijze de maximale hoogte die de vuurpijl bereikt.

6p **19** Bereken op algebraïsche wijze op welke afstand van O de vuurpijl op de grond komt.