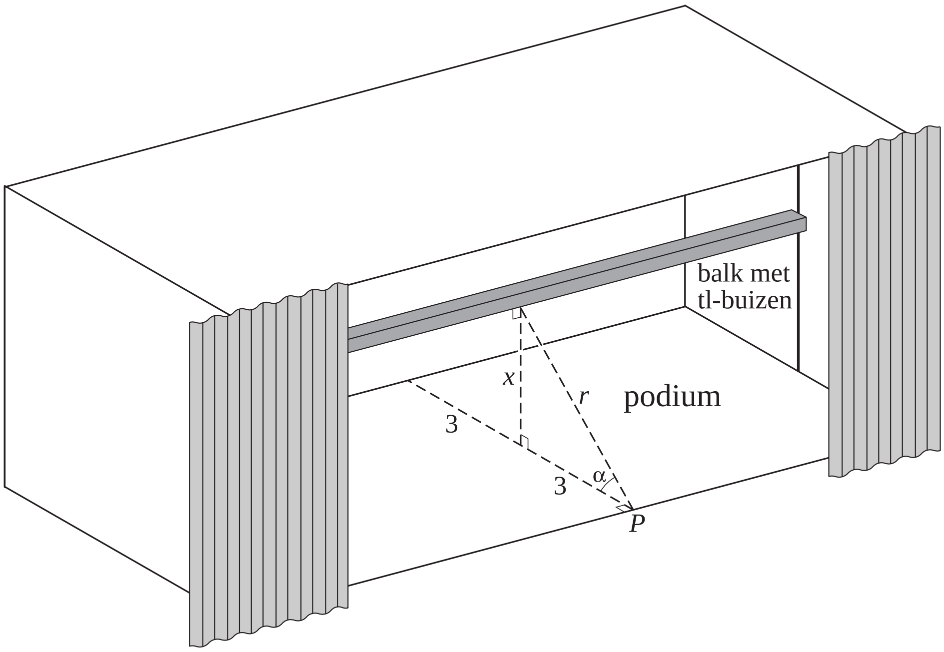
Podiumverlichting

Een podium is 6 meter diep. Midden boven het podium hangt een balk met tl-buizen. De verlichtingssterkte op het podium is het kleinst aan de rand, bijvoorbeeld in punt P. De afstand van P tot de balk is r meter, de hoogte van de balk boven het podium is x meter en de hoek die het kortste verbindingslijnstuk van de balk en punt P met het podium maakt is α radialen. Zie figuur 1.

figuur 1



De verlichtingssterkte op het podium in punt P noemen we V (in lux). V is omgekeerd evenredig met r en evenredig met $\sin\alpha$. Dus $V = c \cdot \frac{1}{r} \cdot \sin\alpha$, waarbij de evenredigheidsconstante c afhangt van het lichtvermogen van de tl-buizen. Voor deze balk met tl-buizen geldt: $c = 650$ (lux·m).

Er geldt: $V = \dfrac{650x}{9 + x^2}$.

3p **1** Toon aan dat deze formule juist is.

De balk met tl-buizen kan omhoog gehesen worden: de hoogte kan variëren van 2,0 tot 5,0 meter.

De verlichtingssterkte op het podium in punt P moet minimaal 100 lux zijn.

5p **2** Bereken langs algebraïsche weg op welke hoogtes de balk mag hangen.

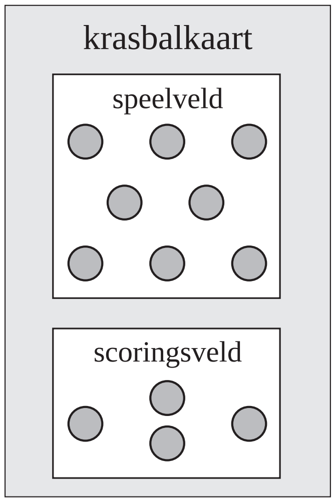
Er is een hoogte van de balk waarbij V maximaal is.

6p **3** Bereken deze hoogte langs algebraïsche weg.

Krasbal

In 2001 werd het spel “krasbal” geïntroduceerd. Het spel werd op één speelkaart door twee spelers gespeeld. In deze opgave is de speelkaart ("krasbalkaart") sterk vereenvoudigd.
In figuur 2 zie je de krasbalkaart, bestaande uit het "speelveld" en het "scoringsveld". In het speelveld zijn acht vakjes die kunnen worden open gekrast: vier met de letter V (van balVerlies) en vier met de letter P (van doelPoging). In het scoringsveld zijn vier vakjes die kunnen worden open gekrast: twee met de letter D (van Doelpunt) en twee met de letter M (van Misser).

figuur 2



4p **4** Hoeveel verschillende krasbalkaarten zijn er mogelijk?

Het spel wordt als volgt gespeeld:
- als een speler aan de beurt is, krast hij eerst een vakje in het speelveld open;
- als hij in het speelveld
  - een V open krast, gaat de beurt naar zijn tegenstander,
  - een P open krast, gaat hij verder naar het scoringsveld;
- als hij in het scoringsveld
  - een D open krast, heeft hij de wedstrijd gewonnen en stopt het spel,
  - een M open krast, gaat de beurt naar zijn tegenstander.

Het aantal hokjes dat in een wedstrijd wordt open gekrast, is de lengte van de wedstrijd.

4p **5** Bereken de kans dat een wedstrijd lengte 4 heeft.

Ruud en Patrick spelen het krasbalspel vaak. Het valt Patrick op dat, als Ruud mag beginnen, hij bijna altijd een P open krast. Het lijkt wel alsof Ruud kan zien wat er in een vakje staat! Patrick gaat in de komende tien spellen die Ruud mag beginnen, bijhouden hoe vaak het eerste vakje dat Ruud open krast een P is. Als dit er acht of meer zijn, zal hij Ruud van vals spel beschuldigen.

4p **6** Bereken de kans dat hij Ruud ten onrechte van vals spel zal beschuldigen.

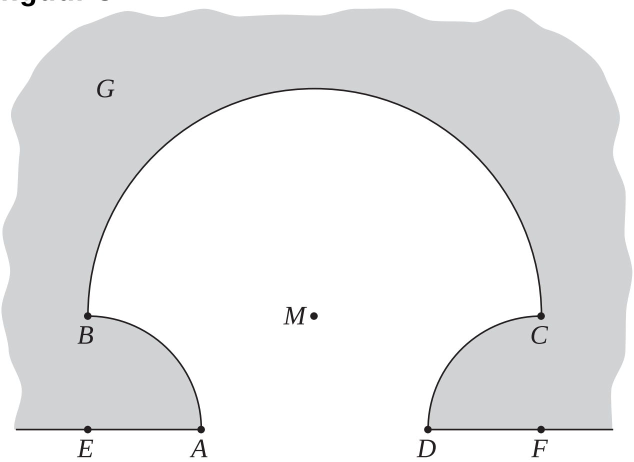
Cirkelinham

Een gebied G heeft aan een van zijn rechte zijden, EF, een inham, waarvan de rand bestaat uit drie cirkelbogen:

- boog AB is een kwartcirkel met straal 3 en middelpunt E,
- boog CD is een kwartcirkel met straal 3 en middelpunt F,
- boog BC is een halve cirkel met straal 6 en middelpunt M,
- E, A, D en F liggen op een rechte lijn.

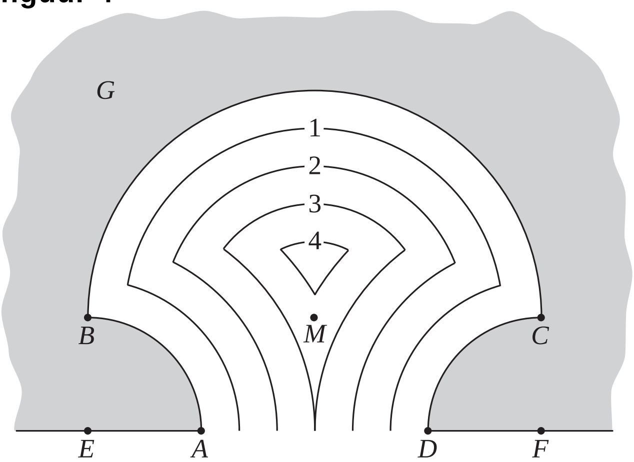
Zie figuur 3. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 3



In figuur 4 zijn in de inham de iso-afstandslijnen getekend op de afstanden 1, 2, 3 en 4 van het land.

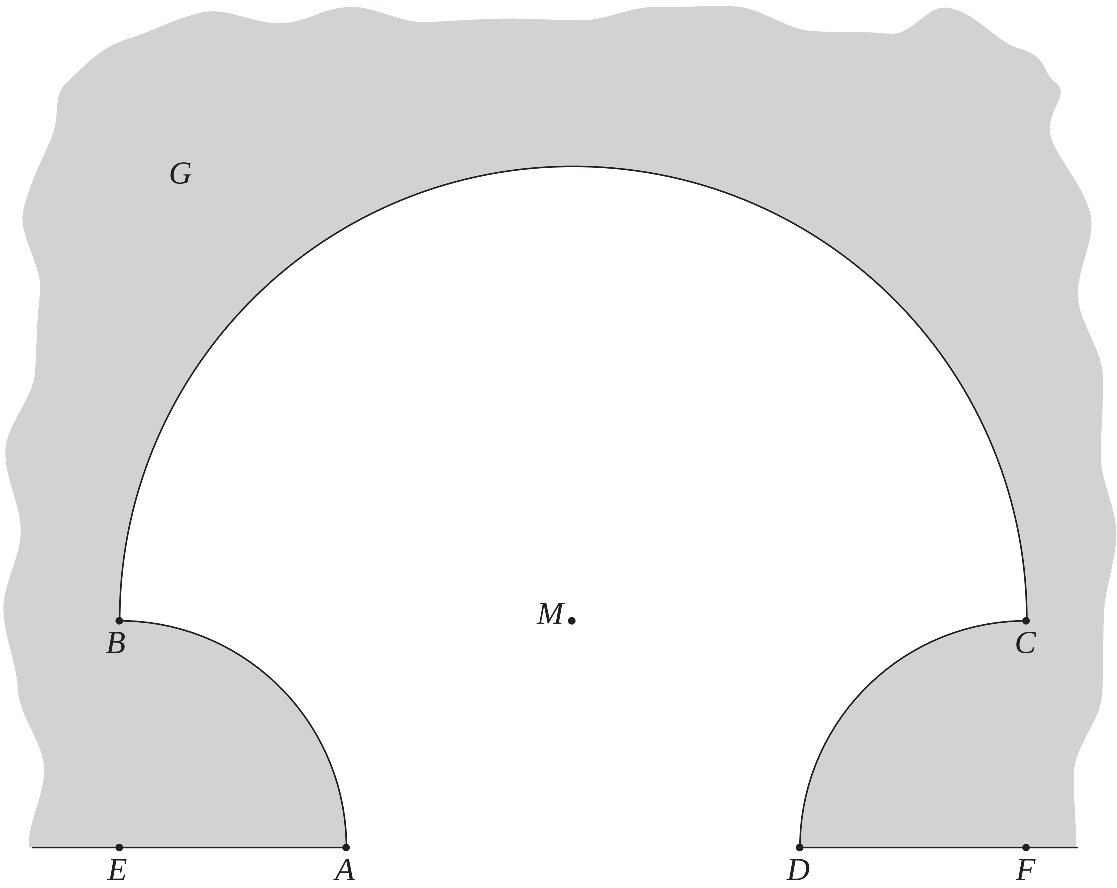
figuur 4



4p **7** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de iso-afstandslijn waarop het punt M ligt. Licht je werkwijze toe.

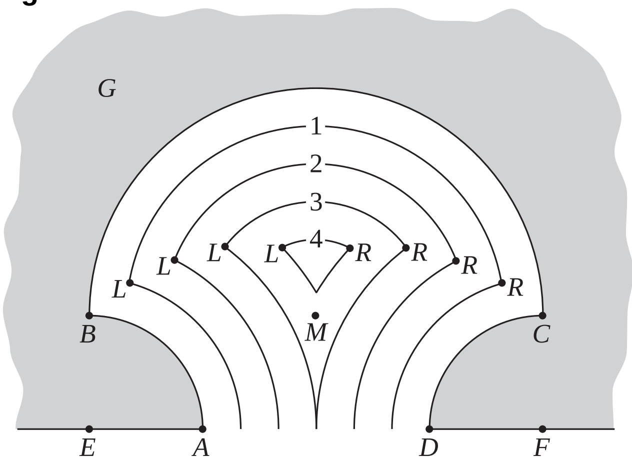
uitwerkbijlage

7



Elke iso-afstandslijn bestaat uit drie cirkelbogen. Deze drie bogen sluiten op elkaar aan in de punten L (links) en R (rechts). Zie figuur 5.

figuur 5

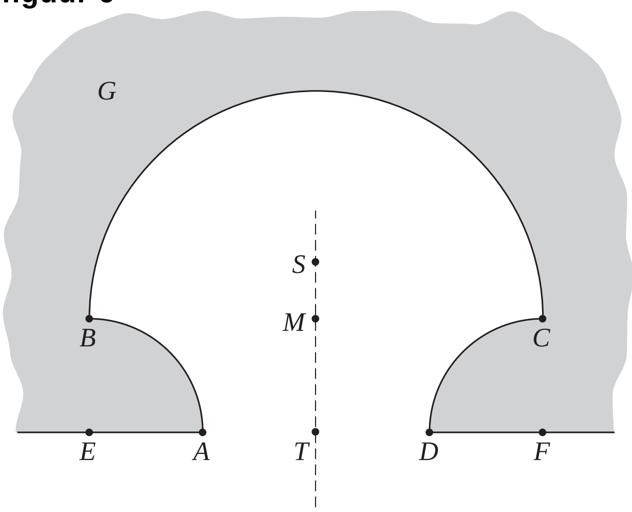


Voor alle punten L geldt: $LM + LE = 9$.

4p **8** Toon dit aan.

Uit $LM + LE = 9$ volgt dat de punten L op een ellips met brandpunten E en M liggen. Evenzo liggen de punten R op een ellips met brandpunten F en M. De twee ellipsen snijden elkaar in twee punten, die vanwege de symmetrie van de figuur op de middelloodlijn van EF liggen. Een van deze snijpunten is het midden T van EF. Het andere snijpunt is S. Zie figuur 6.

figuur 6



4p **9** Bereken de afstand MS.

De functie $f(x) = e^x$

Op de grafiek van de functie $f(x) = e^x$ liggen de punten A en B met x-coördinaten a en $a+1$. Zie figuur 7.

Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de horizontale lijn door B en de verticale lijn door A is in figuur 7 grijs aangegeven.

4p **10** Bereken exact de waarde van a waarvoor de oppervlakte van dit gebied gelijk is aan 3.

Als a toeneemt, neemt de richtingscoëfficiënt van de lijn AB ook toe.

4p **11** Bereken voor welke waarden van a de richtingscoëfficiënt van AB kleiner dan 1 is. Rond in je antwoord de grenswaarde af op twee decimalen.

In de volgende vragen is $a = 1$, dus A is het punt $(1, e)$ en B is het punt $(2, e^2)$.

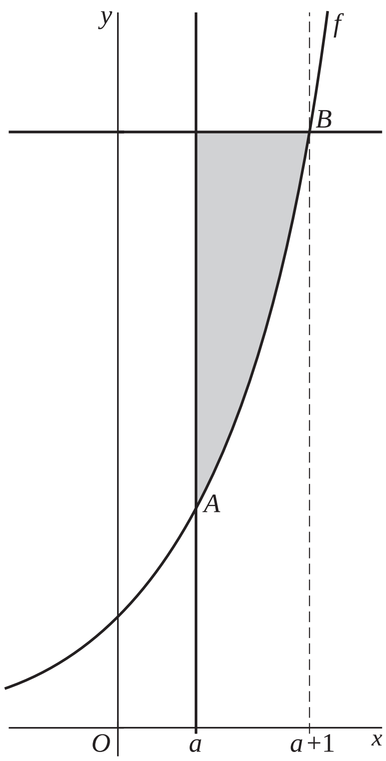
4p **12** Bereken de lengte van de grafiek van f tussen A en B.

P en Q zijn de loodrechte projecties van A op de x-as en de y-as. De rechthoek $OPAQ$ wordt door de grafiek van f verdeeld in twee stukken. Zie figuur 8.

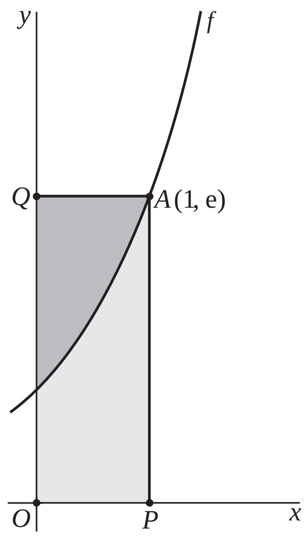
Beide stukken wentelen we om de x-as.

6p **13** Bereken exact het verschil tussen de inhouden van de twee omwentelingslichamen.

figuur 7



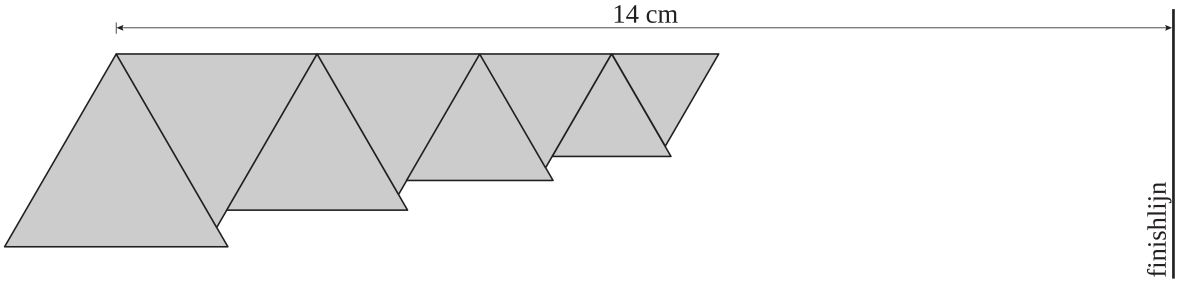
figuur 8



Driehoeken plakken

We maken een figuur die uit oneindig veel gelijkzijdige driehoeken bestaat. We beginnen met een gelijkzijdige driehoek met zijde 3 cm. Rechtsboven plakken we er een gelijkzijdige driehoek aan met zijde 2,7 cm. Zo plakken we er steeds rechtsboven een gelijkzijdige driehoek aan, de ene keer met de top naar beneden, de andere keer met de top naar boven. De zijden van de nieuw te plakken driehoek zijn 0,9 keer zo groot als de zijden van de vorige driehoek die werd geplakt.
In figuur 9 zie je de figuur in opbouw: na zeven keer plakken. Na elke keer plakken komt de figuur dichter bij de finishlijn.
We plakken oneindig vaak.

figuur 9

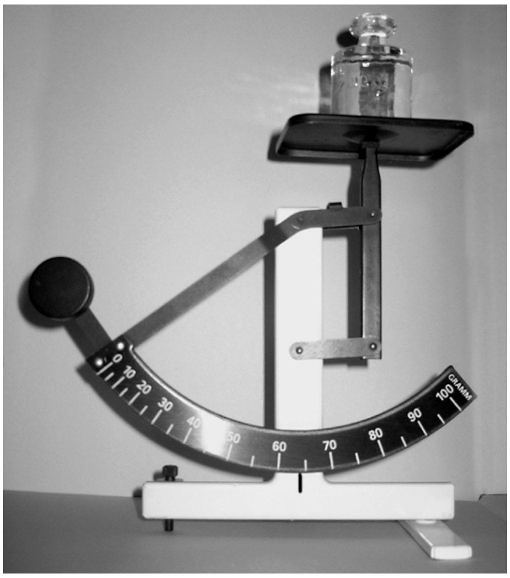


6p **14** Onderzoek met behulp van een berekening of de figuur op den duur de finishlijn overschrijdt.

Brievenweger

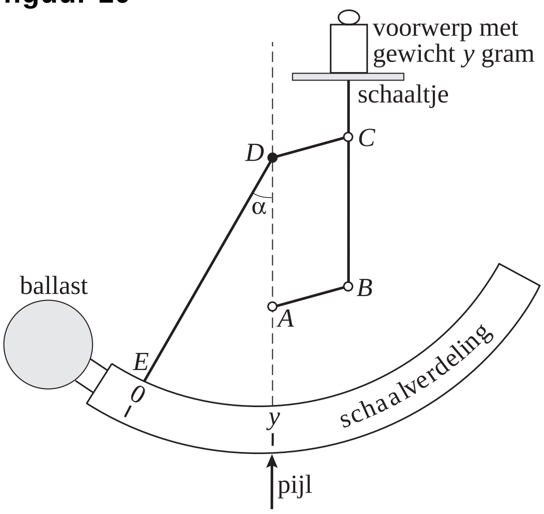
Hieronder zie je een foto van een brievenweger. Op het schaaltje staat een voorwerp met een gewicht van 64 gram.

foto



In figuur 10 is schematisch een soortgelijke brievenweger weergegeven met een voorwerp dat y gram weegt. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.
De pijl waarbij je het gewicht afleest, ligt loodrecht onder het draaipunt D. De ballast zorgt ervoor dat het verbindingsstuk DE verticaal staat als er niets op het schaaltje ligt. De verbinding tussen de stukken ED en DC is vast.

figuur 10



Als een voorwerp van y gram op het schaaltje geplaatst wordt, draait het verbindingsstuk CDE om punt D over een hoek van α radialen. De cirkelvormige schaalverdeling en de ballast draaien ook en de pijl wijst op de schaalverdeling het getal y aan. Het schaaltje blijft horizontaal door de scharnieren in de punten A, B en C. Zie figuur 10.

Bij deze brievenweger kan met behulp van statica de formule $y = 70\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}$ afgeleid worden (α in radialen).

3p **15** Bepaal door meten en berekenen de waarde van y. Gebruik daarvoor de figuur op de uitwerkbijlage. Rond je antwoord af op een gehele waarde. Licht je antwoord toe.

4p **16** Bereken exact de waarde van α waarvoor geldt $y = 70$.

Voor de afgeleide $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}$ geldt de formule $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{70\sin(\frac{1}{4}\pi)}{\sin^2(\alpha + \frac{1}{4}\pi)}$.

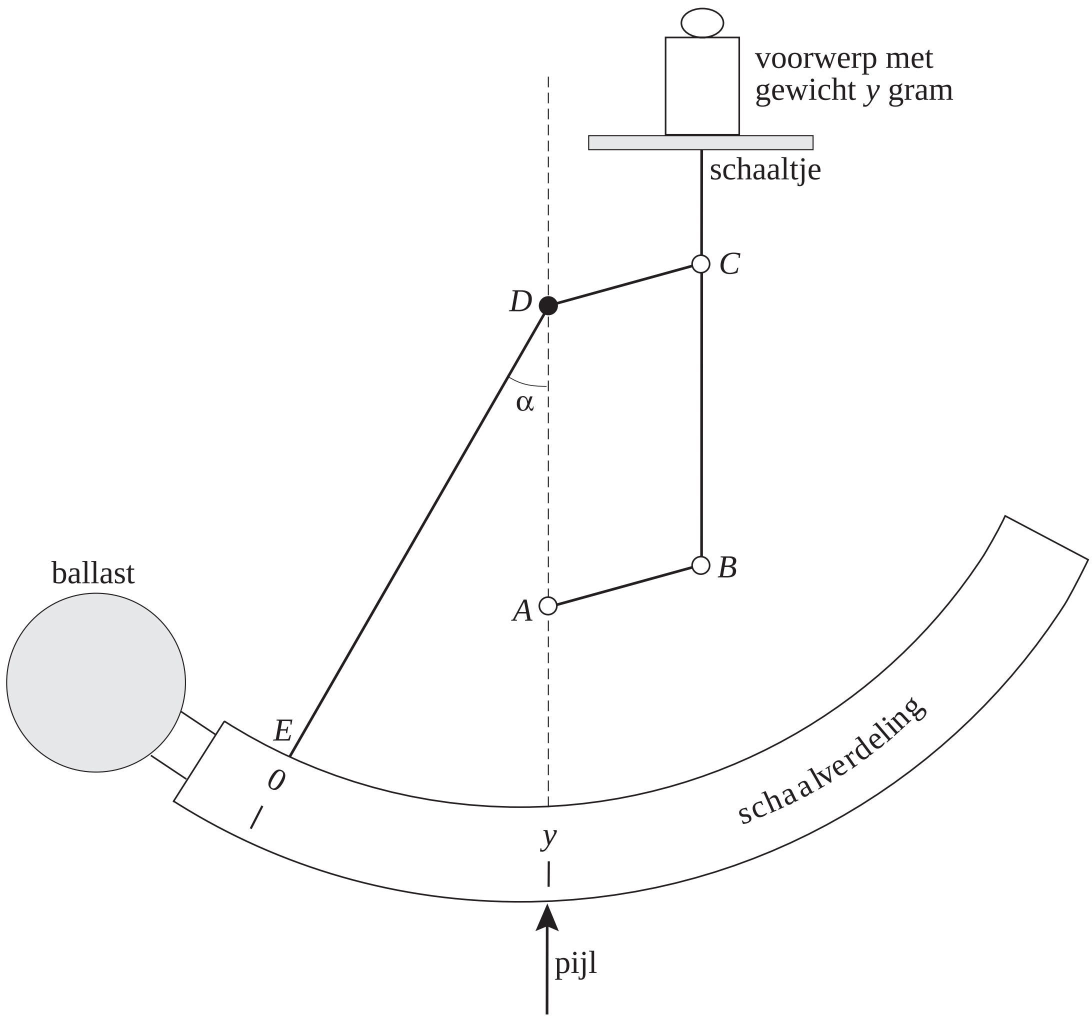
4p **17** Toon dit aan.

Op de schaalverdeling kun je alle streepjes van 1, 2, 3, … tot 100 gram aangeven. De onderlinge afstanden tussen die streepjes zijn verschillend. In de buurt van een zekere waarde van α liggen de streepjes het verst van elkaar. Bij deze waarde van α is $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}$ minimaal.

3p **18** Bereken in twee decimalen nauwkeurig de waarde van α waarvoor $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}$ minimaal is.

uitwerkbijlage

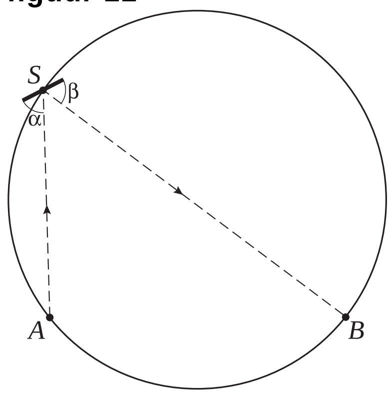
15



Spiegeltjes op een cirkel

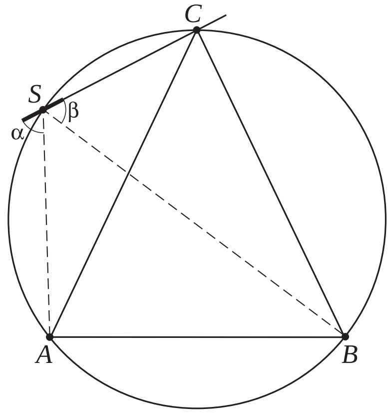
De punten A en B liggen op een cirkel.
In het punt S op de cirkel plaatsen we een vlak spiegeltje, zo dat de lichtstraal vanuit A wordt weerspiegeld naar B. De hoek α die AS met de spiegel maakt is dus gelijk aan de hoek β die SB met de spiegel maakt. Zie figuur 11.

figuur 11



Als we de lijn van de spiegel in S verlengen, snijdt deze de cirkel in een punt C. Zie figuur 12. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 12



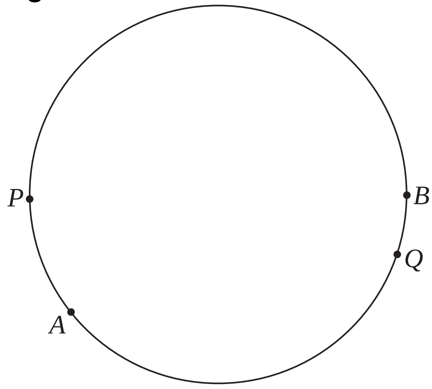
Er geldt: $\angle BAC = \angle ABC$.

4p **19** Toon dit aan.

De omgekeerde bewering is ook waar:
als in driehoek ABC geldt $\angle BAC = \angle ABC$, dan geldt voor elk punt S op de omgeschreven cirkel van driehoek ABC $\alpha = \beta$, waarbij α en β de hoeken zijn die respectievelijk AS en BS met lijn CS maken.

In figuur 13 zijn twee andere punten A en B op de cirkel getekend en verder nog twee punten P en Q op de cirkel. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage.
In P en in Q willen we een spiegeltje zo plaatsen dat in elk van beide spiegeltjes lichtstralen vanuit A weerkaatst worden naar B.

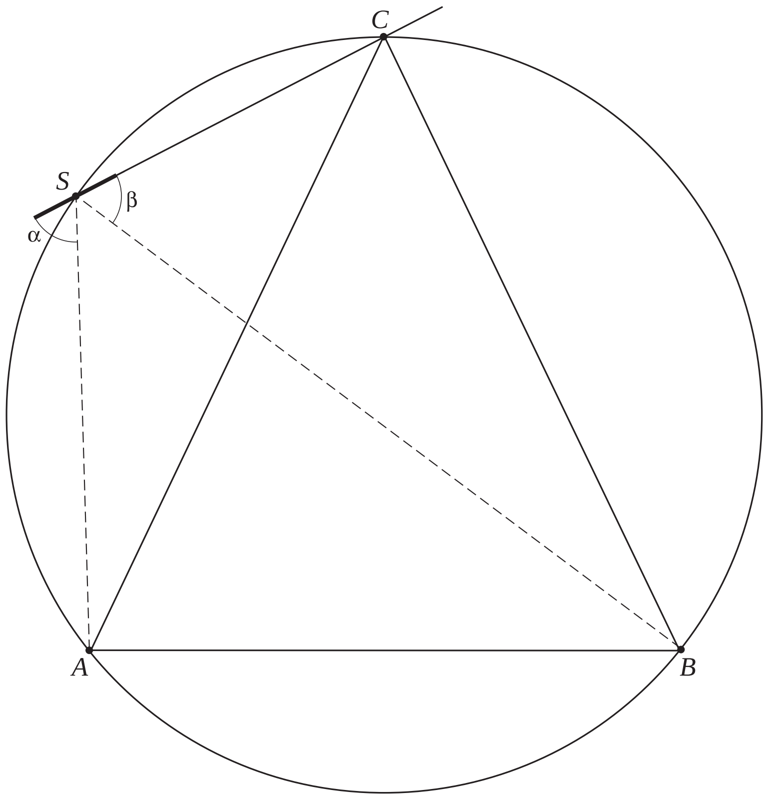
figuur 13



4p **20** Hoe kun je de omgekeerde bewering gebruiken om de juiste stand van de spiegeltjes bij P en Q te tekenen? Licht je antwoord toe met een tekening op de uitwerkbijlage.

uitwerkbijlage

19



20