Wisselingen in rijtjes kop en munt

Het komt wel eens voor dat onderzoeksresultaten vervalst worden om gewenste uitkomsten te krijgen. In deze opgave bekijken we een wiskundige techniek om zulke fraude te achterhalen. Deze techniek is erop gebaseerd dat het verdacht is als in rijtjes onafhankelijke waarnemingen te veel afwisseling voorkomt. We demonstreren deze techniek aan de hand van een sterk vereenvoudigde situatie: het meerdere keren werpen van een muntstuk.

We werpen vier keer een zuiver muntstuk en noteren de rij uitkomsten kop (K) of munt (M). We kijken naar **het aantal wisselingen** in zo'n rijtje. Zo heeft bijvoorbeeld het rijtje MKMM twee wisselingen en het rijtje KKKK nul wisselingen.

4p **1** Toon aan dat bij vier keer werpen de verwachtingswaarde van het aantal wisselingen $1\frac{1}{2}$ is.

We werpen tien keer een zuiver muntstuk en noteren de rij uitkomsten:

$$\otimes \overset{1}{-} \otimes \overset{2}{-} \otimes \overset{3}{-} \otimes \overset{4}{-} \otimes \overset{5}{-} \otimes \overset{6}{-} \otimes \overset{7}{-} \otimes \overset{8}{-} \otimes \overset{9}{-} \otimes$$

Hierin stelt $\otimes$ telkens kop (K) of munt (M) voor. De negen plekken waar een wisseling kan optreden, zijn genummerd.

3p **2** Toon aan dat er 252 verschillende rijtjes van tien worpen zijn met precies 5 wisselingen.

In onderstaande tabel staan de kansen op de verschillende aantallen wisselingen bij tien keer werpen van een muntstuk.

aantal wisselingen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
kans	$\frac{2}{1024}$	$\frac{18}{1024}$	$\frac{72}{1024}$	$\frac{168}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{168}{1024}$	$\frac{72}{1024}$	$\frac{18}{1024}$	$\frac{2}{1024}$

Jolly moet tien keer een muntstuk werpen, het verkregen rijtje noteren en de wisselingen tellen. Dit saaie werk moet zij 20 keer doen.

3p **3** Bereken de kans dat de 20 rijtjes allemaal ten minste één wisseling hebben.

Hieronder staan de rijtjes die Jolly heeft opgeschreven met achter elk rijtje het aantal wisselingen.

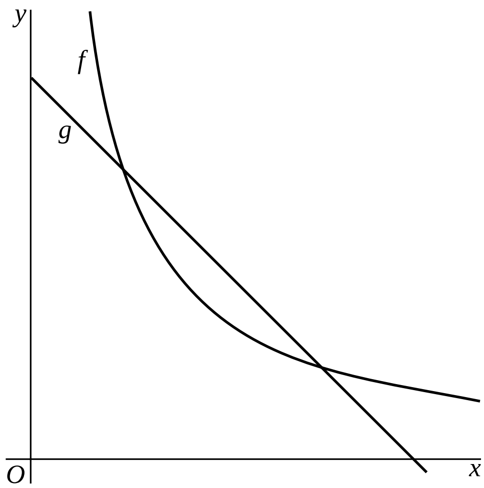
KMKKMMMKMM 5	KKMKMMMKKK 4	MMMKMKMMKM 6	KMKMKKKKMK 6	MMKKKMMMMK 3
MMMKKMKMMM 4	MKMMMKKKMM 4	MKKKMMMMKM 4	KMKKMMKKMM 5	MMMMKKKKKK 1
MMKKKKKMMM 2	MMKMKMKKMK 7	KMKKMKMMKK 6	MMMKKMMMMK 3	KMMKMMKKMK 6
KKKMKMKKMK 6	MKMKKMKMMK 7	KKKKMKMMMM 3	KKMKMKMMKK 6	MKMKMMKKKM 6

We vragen ons af of Jolly wel echt met een muntstuk heeft geworpen. Zij heeft namelijk 9 rijtjes met meer dan 5 wisselingen genoteerd.
Als iemand echt met een muntstuk werpt, is de kans op 9 of meer rijtjes met meer dan 5 wisselingen nogal klein. Als die kans kleiner dan 5% is, vertrouwen we Jolly niet en verdenken we haar ervan dat zij - zonder echt met een muntstuk te werpen - zomaar wat K-M-rijtjes heeft opgeschreven.

5p **4** Is er voldoende aanleiding om Jolly niet te vertrouwen? Licht je antwoord toe.

Een gebroken functie

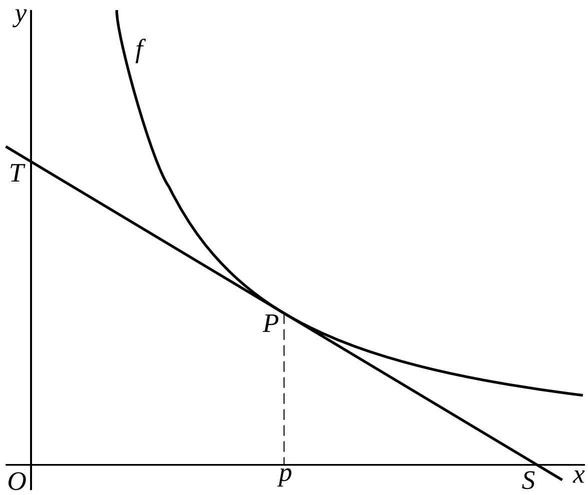
figuur 1



De functies f en g zijn gegeven door
$f(x) = \frac{60}{x}$ en $g(x) = 18 - x$, met $x > 0$.
In figuur 1 zijn de grafieken van f en g getekend.

5p **5** Bereken langs algebraïsche weg de exacte waarden van de x-coördinaten van de snijpunten van de grafieken van f en g.

figuur 2



Het punt P ligt op de grafiek van f.
De raaklijn in P aan de grafiek van f snijdt de x-as in S en de y-as in T.
De x-coördinaat van P noemen we p.
Zie figuur 2.

Een vergelijking van de raaklijn ST is
$y = -\frac{60}{p^2} \cdot x + \frac{120}{p}$.

5p **6** Toon dit aan.

4p **7** Toon aan dat de oppervlakte van driehoek OST onafhankelijk is van de plaats van P op de grafiek van f.

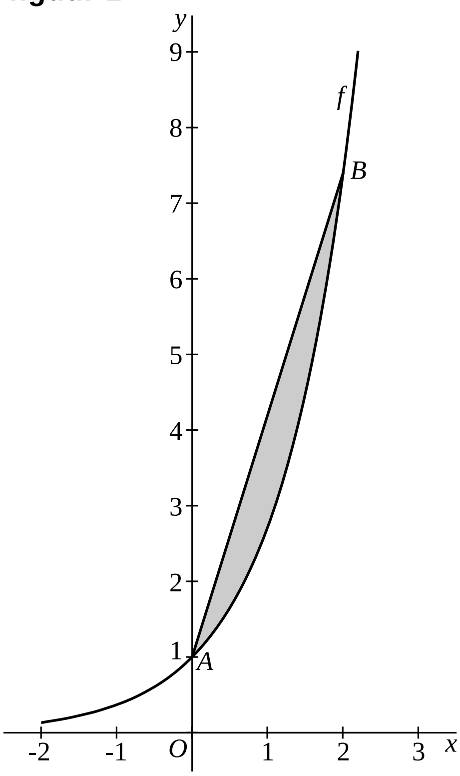
Oppervlakte en inhoud bij $f(x) = \mathrm{e}^x$

De functie f is gegeven door $f(x) = \mathrm{e}^x$.
Op de grafiek van deze functie liggen de punten $A(0,1)$ en $B(2, \mathrm{e}^2)$.

De grafiek van f en het lijnstuk AB sluiten een vlakdeel in. Zie figuur 1.

6p **8** Bereken algebraïsch de oppervlakte van dat vlakdeel.

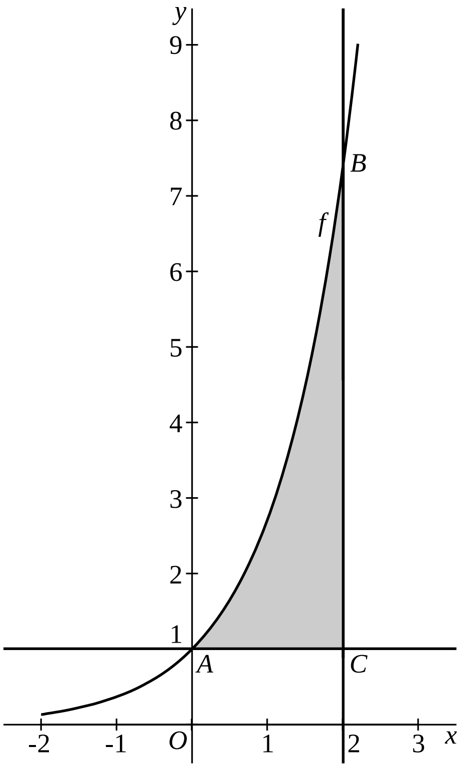
figuur 1



De grafiek van f, de lijn $y = 1$ en de lijn $x = 2$ sluiten een vlakdeel in. Zie figuur 2.
We wentelen dit vlakdeel om de lijn $y = 1$.

6p **9** Bereken de exacte inhoud van het omwentelingslichaam dat dan ontstaat.

figuur 2

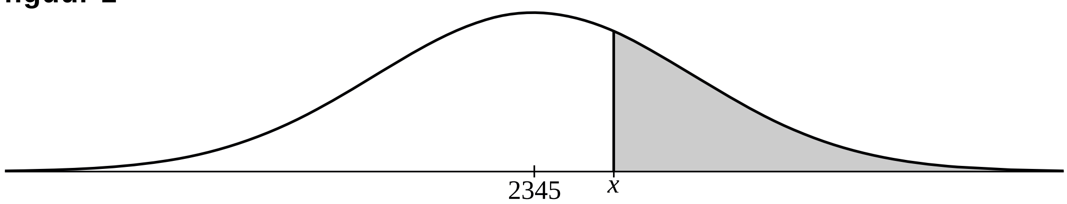


Elo

De Hongaar Elo heeft een systeem bedacht om de gemiddelde speelsterkte van een schaker in een getal uit te drukken. Het systeem gaat ervan uit dat de speelsterkte van een schaker normaal verdeeld is, met standaardafwijking 200. Het gemiddelde van de normale verdeling is niet bij elke schaker hetzelfde. Dit gemiddelde is, afgerond op een geheel getal, de Elo-rating van de schaker.

Schaker A met Elo-rating 2345 speelt een groot aantal partijen tegen een nieuwe schaakcomputer, waarvan de Elo-rating nog niet bekend is.
We veronderstellen dat de schaakcomputer altijd even sterk speelt met speelsterkte x.
De verwachte score van A per partij wordt in het systeem van Elo gegeven door de oppervlakte rechts van x onder de normaalkromme die behoort bij de speelsterkte van A. Zie het grijs gemaakte gebied in figuur 1.

figuur 1



Op grond van de gespeelde partijen tussen A en de schaakcomputer zijn de kansen van A op winst, remise en verlies bekend. Deze kansen staan in de volgende tabel:

	winst	**remise**	**verlies**
kans van A	0,1	0,6	0,3

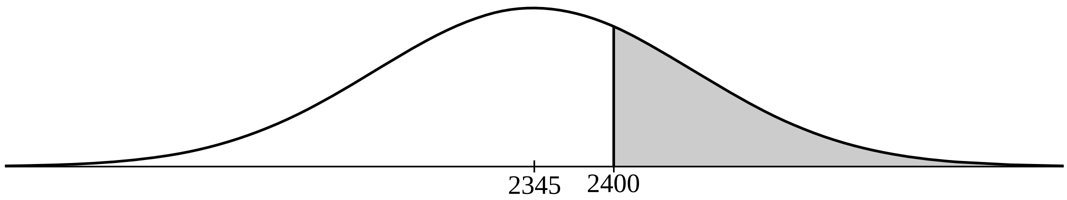
Een winstpartij levert A 1 punt op, remise $\frac{1}{2}$ punt en een verliespartij 0 punten.

De verwachte score van A per partij is dus $0,1 \cdot 1 + 0,6 \cdot \frac{1}{2} + 0,3 \cdot 0 = 0,4$.

3p **10** Bereken met behulp van deze gegevens de Elo-rating x van de schaakcomputer.

Schaker A speelt vervolgens een match tegen een andere schaakcomputer, die een rating van 2400 heeft.
De verwachte score van A per partij is de oppervlakte van het grijs gemaakte gebied in figuur 2.

figuur 2



De match gaat over 12 partijen. Het verwachte aantal punten V dat A in de hele match behaalt, is 12 maal de verwachte score van A per partij.
Het aantal punten dat A behaalt in de match blijkt $6\frac{1}{2}$ te zijn. Dat is meer dan het verwachte aantal V. De rating van A wordt daarom na de match als volgt aangepast:

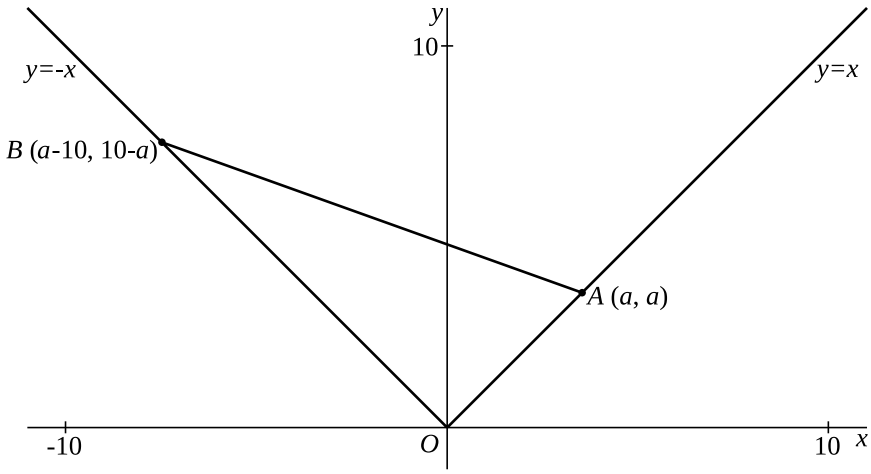
nieuwe rating van A = *oude rating van* A + 10 · $(6\frac{1}{2} - V)$.

5p **11** Bereken de nieuwe rating van A.

Een parabool?

Voor elk getal a met $0 \le a \le 10$ zijn gegeven:
het punt $A(a, a)$ op de lijn $y = x$ en het punt $B(a-10, 10-a)$ op de lijn $y = -x$.
Zie figuur 1.

figuur 1

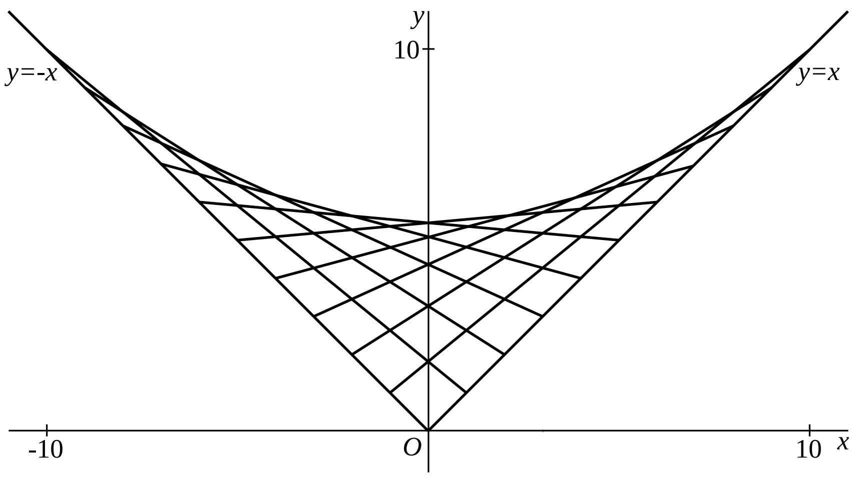


Voor de lijn AB geldt de formule $y = (\frac{1}{5}a - 1)x - \frac{1}{5}a^2 + 2a$.

4p **12** Toon aan dat deze formule juist is voor $a = 4$.

Voor elke waarde van a tussen 0 en 10 heeft het lijnstuk AB een snijpunt met de y-as. Zie figuur 2.

figuur 2

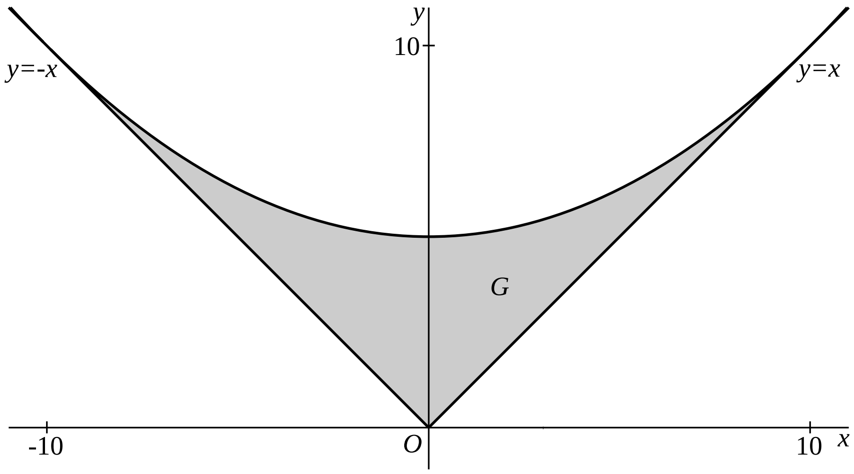


De grootste waarde die de y-coördinaat van zo'n snijpunt aanneemt is 5.

4p **13** Toon dit langs algebraïsche weg aan.

Als je alle verbindingslijnstukken AB tekent voor $0 \leq a \leq 10$, wordt een gebied G opgevuld. In figuur 3 is het gebied G grijs gemaakt.

figuur 3



Het lijkt alsof het gebied G aan de bovenkant begrensd wordt door een parabool. Als dit juist is, is dat de parabool die door de punten $(0, 5)$, $(10, 10)$ en $(-10, 10)$ gaat.

Een formule van die parabool is: $y = \frac{1}{20}x^2 + 5$.

4p **14** Toon dit laatste aan door uit te gaan van de formule $y = ax^2 + bx + c$ en de waarden van a, b en c te berekenen.

$(4, 5\frac{4}{5})$ is een punt van de parabool $y = \frac{1}{20}x^2 + 5$.

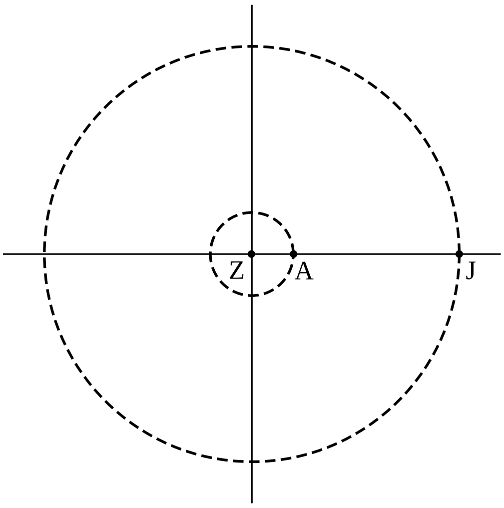
Als het gebied G aan de bovenkant begrensd wordt door deze parabool, is de raaklijn aan de parabool in $(4, 5\frac{4}{5})$ een van de lijnen AB.

6p **15** Onderzoek of de raaklijn aan de parabool in $(4, 5\frac{4}{5})$ een van de lijnen AB is.

Jupiter en Aarde

De planeten Jupiter en Aarde draaien om de zon. In deze opgave doen we de werkelijkheid enigszins geweld aan met de volgende vereenvoudigingen:
- de banen van Jupiter en Aarde zijn cirkelvormig
- de banen liggen in één vlak
- Jupiter en Aarde hebben constante snelheid
- Jupiter en Aarde zijn puntvormig
- de omlooptijd van Aarde is 1 jaar
- de omlooptijd van Jupiter is 12 jaar
- de afstand Jupiter-Zon is 5 keer zo groot als de afstand Aarde-Zon

figuur 1



We kiezen een assenstelsel in het vlak waar Jupiter en Aarde zich bewegen met Zon in de oorsprong en als lengte-eenheid de astronomische eenheid (AE); dat is de afstand Aarde-Zon. Eén AE is 150 miljoen km.
Aarde heeft in dit model de bewegingsvergelijkingen: $x_A = \cos 2\pi t$, $y_A = \sin 2\pi t$.
De bewegingsvergelijkingen van Jupiter zijn: $x_J = 5\cos \frac{1}{6}\pi t$, $y_J = 5\sin \frac{1}{6}\pi t$.
Hierbij is t de tijd in jaren.
In figuur 1 staat een schets van de situatie op tijdstip $t = 0$.

3p **16** Bereken de snelheid van Aarde in km/uur. Neem voor een jaar 365 dagen.

De onderlinge afstand tussen Jupiter en Aarde op tijdstip t is gelijk aan $\sqrt{26 - 10\cos(\frac{11}{6}\pi t)}$ AE.

3p **17** Bereken het eerste tijdstip na $t = 0$ waarop de onderlinge afstand tussen Jupiter en Aarde gelijk is aan 5 AE.

5p **18** Bereken op algebraïsche wijze met welke snelheid de afstand tussen Aarde en Jupiter verandert op tijdstip $t = 3$. Geef je antwoord in AE/jaar, afgerond op twee decimalen.

Op tijdstip $t = 0$ staan Zon, Aarde en Jupiter op één lijn, met Aarde tussen Zon en Jupiter in. Zie figuur 1. Er zijn meer tijdstippen waarop dit zo is.

5p **19** Bereken het eerstvolgende tijdstip na $t = 0$ waarop dit het geval is.