Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Wisselingen in rijtjes kop en munt

1 maximumscore 4

- Er zijn 2 rijtjes met 0 wisselingen, 6 rijtjes met 1 wisseling, 6 rijtjes met 2 wisselingen en 2 rijtjes met 3 wisselingen 1
- De kansen op 0, 1, 2 en 3 wisselingen zijn $\frac{2}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{6}{16}$ en $\frac{2}{16}$ 2
- De verwachtingswaarde is dus $\frac{2}{16}\cdot 0+\frac{6}{16}\cdot 1+\frac{6}{16}\cdot 2+\frac{2}{16}\cdot 3=\frac{24}{16}=1\frac{1}{2}$ 1

of

- Er zijn drie plekken in een rij van vier worpen waar al of niet een wisseling optreedt 2
- Voor elke plek is de kans $\frac{1}{2}$ dat er een wisseling optreedt 1
- De verwachtingswaarde is dus $3\cdot\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}$ 1

2 maximumscore 3

- Op 5 van de 9 plekken moet een wisseling plaatsvinden; dit kan op $\binom{9}{5}$ manieren 1
- $\binom{9}{5}=126$ 1
- Als de wisselingen vastliggen, kan een rijtje nog met een K of een M beginnen; dus zijn er $2\cdot 126=252$ rijtjes met 5 wisselingen 1

3 maximumscore 3

- De kans dat een rijtje ten minste één wisseling heeft, is $(1-\frac{2}{1024}=)\,\frac{1022}{1024}$ 1
- De kans op 20 keer zo'n rijtje is $(\frac{1022}{1024})^{20}\approx 0{,}962$ 2

4 maximumscore 5

- De kans dat een willekeurig rijtje meer dan 5 wisselingen heeft, is $\frac{168+72+18+2}{1024}=\frac{260}{1024}=\frac{65}{256}$ 1
- Het gaat om een binomiale kans met $n=20$ en $p=\frac{65}{256}$ 1
- Beschrijven hoe de binomiale kans $P(X\geq 9 \mid n=20 \text{ en } p=\frac{65}{256})$ berekend kan worden, waarbij X het aantal rijtjes met meer dan 5 wisselingen is 1
- De kans is (ongeveer) 0,045 1
- Deze kans is kleiner dan 5%, dus we vertrouwen Jolly niet 1

Vraag	Antwoord	Scores

Een gebroken functie

5 **maximumscore 5**

- $\frac{60}{x} = 18 - x$ geeft $60 = 18x - x^2$ — 1
- Hieruit volgt $x^2 - 18x + 60 = 0$ — 1
- De discriminant van deze vergelijking is 84 — 1
- De x-coördinaten van de snijpunten zijn $9 + \sqrt{21}$ en $9 - \sqrt{21}$ (of gelijkwaardige uitdrukkingen) — 2

6 **maximumscore 5**

- $f\,'(x) = -\frac{60}{x^2}$ — 1
- De richtingscoëfficiënt van ST is $-\frac{60}{p^2}$ (dus $y = -\frac{60}{p^2} \cdot x + b$ is voor zekere b een vergelijking van ST) — 1
- De y-coördinaat van P is $\frac{60}{p}$ — 1
- De coördinaten van P invullen in $y = -\frac{60}{p^2} \cdot x + b$ geeft $\frac{60}{p} = -\frac{60}{p^2} \cdot p + b$ — 1
- $\frac{60}{p} = -\frac{60}{p} + b$ geeft $b = \frac{120}{p}$, dus een vergelijking van de raaklijn ST is $y = -\frac{60}{p^2} \cdot x + \frac{120}{p}$ — 1

7 **maximumscore 4**

- Invullen van $x = 0$ in de vergelijking van de raaklijn geeft $y = \frac{120}{p}$ (dus $T\left(0, \frac{120}{p}\right)$) — 1
- Invullen van $y = 0$ in de vergelijking van de raaklijn geeft $\frac{60}{p^2} \cdot x = \frac{120}{p}$ — 1
- Hieruit volgt $x = 2p$ (dus $S(2p, 0)$) — 1
- De oppervlakte van driehoek OST is $\frac{1}{2} \cdot 2p \cdot \frac{120}{p} = 120$ (dus onafhankelijk van p en daardoor onafhankelijk van de plaats van P op de grafiek van f) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Oppervlakte en inhoud bij $f(x) = e^x$

8 maximumscore 6

- Lijn AB heeft richtingscoëfficiënt $\dfrac{e^2-1}{2} = \frac{1}{2}(e^2-1)$ — 1
- Voor lijn AB geldt de formule $y = \frac{1}{2}(e^2-1)\cdot x+1$ — 1
- De oppervlakte van het vlakdeel is $\int_0^2 (\frac{1}{2}(e^2-1)\cdot x+1-e^x)dx$ — 1
- Een primitieve van $\frac{1}{2}(e^2-1)\cdot x+1-e^x$ is $\frac{1}{4}(e^2-1)\cdot x^2+x-e^x$ — 2
- De gevraagde oppervlakte is 2 — 1

of

- De oppervlakte van het vlakdeel is het verschil tussen de oppervlakte van een trapezium en $\int_0^2 e^x dx$ — 1
- De oppervlakte van het bedoelde trapezium is e^2+1 — 2
- $\int_0^2 e^x dx = e^2-1$ — 2
- De gevraagde oppervlakte is 2 — 1

9 maximumscore 6

- De grafiek van $g(x) = e^x - 1$ wordt om de x-as gewenteld — 1
- De inhoud is $\int_0^2 \pi\cdot(e^x-1)^2 dx$ — 1
- $(e^x-1)^2 = e^{2x}-2e^x+1$ — 1
- Een primitieve van $e^{2x}-2e^x+1$ is $\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x+x$ — 2
- De inhoud is $\pi\cdot(\frac{1}{2}e^4-2e^2+3\frac{1}{2})$ — 1

Vraag	Antwoord	Scores

Elo

10 maximumscore 3

- Er geldt: $P(X > x \mid \mu = 2345,\ \sigma = 200) = 0,4$ — 1
- Beschrijven hoe hieruit x kan worden berekend — 1
- $x \approx 2396$ — 1

11 maximumscore 5

- De verwachte score van A per partij is $P(X > 2400 \mid \mu = 2345,\ \sigma = 200)$ — 1
- Beschrijven hoe deze kans kan worden berekend — 1
- De verwachte score van A per partij is (ongeveer) 0,392 — 1
- $V \approx 12 \cdot 0,392 \approx 4,7$ — 1
- De nieuwe rating van A is $2345 + 10 \cdot (6\tfrac{1}{2} - 4,7) = 2363$ — 1

Een parabool?

12 maximumscore 4

- $A(4,\ 4)$ en $B(-6,\ 6)$ — 1
- Als $a = 4$ is de formule $y = -\tfrac{1}{5}x + 4\tfrac{4}{5}$ — 1
- De coördinaten van A voldoen, want $4 = -\tfrac{1}{5} \cdot 4 + 4\tfrac{4}{5}$ — 1
- De coördinaten van B voldoen ook, want $6 = -\tfrac{1}{5} \cdot -6 + 4\tfrac{4}{5}$ (dus de formule is juist voor $a = 4$) — 1

of

- $A(4,\ 4)$ en $B(-6,\ 6)$ — 1
- De lijn door $A(4,\ 4)$ en $B(-6,\ 6)$ heeft richtingscoëfficiënt $-\tfrac{1}{5}$ — 1
- Voor lijn AB geldt dus $y = 4 - \tfrac{1}{5}(x - 4)$, ofwel $y = -\tfrac{1}{5}x + 4\tfrac{4}{5}$ — 1
- $a = 4$ invullen in de gegeven formule geeft ook $y = -\tfrac{1}{5}x + 4\tfrac{4}{5}$ (dus de formule is juist voor $a = 4$) — 1

Vraag	Antwoord	Scores

13 **maximumscore 4**

- Voor het snijpunt met de y-as geldt $y = -\frac{1}{5}a^2 + 2a$ 1
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a} = -\frac{2}{5}a + 2$ 1
- $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a} = 0$ geeft $a = 5$ 1
- De grootste waarde van y is $-\frac{1}{5}\cdot 5^2 + 2\cdot 5 = 5$ 1

of

- Voor het snijpunt met de y-as geldt $y = -\frac{1}{5}a^2 + 2a$ 1
- $-\frac{1}{5}a^2 + 2a = 0$ geeft $a(-\frac{1}{5}a + 2) = 0$ dus $a = 0$ of $a = 10$ 1
- Hieruit volgt dat het maximum wordt aangenomen voor $a = 5$ 1
- De grootste waarde van y is $-\frac{1}{5}\cdot 5^2 + 2\cdot 5 = 5$ 1

14 **maximumscore 4**

- Invullen van (0, 5) geeft $c = 5$ 1
- Invullen van (–10, 10) en (10, 10) geeft $100a - 10b + 5 = 10$ respectievelijk $100a + 10b + 5 = 10$ 1
- Beschrijven hoe hieruit de waarden van a en b berekend kunnen worden 1
- $b = 0$ en $a = \frac{1}{20}$ 1

15 **maximumscore 6**

- De afgeleide van $\frac{1}{20}x^2 + 5$ is $\frac{1}{10}x$ 1
- $x = 4$ invullen geeft $\frac{2}{5}$ als richtingscoëfficiënt van de raaklijn 1
- Een vergelijking van de raaklijn in $(4, 5\frac{4}{5})$ is $y = \frac{2}{5}x + 4\frac{1}{5}$ 1
- De raaklijn is een van de lijnen AB als $\frac{1}{5}a - 1 = \frac{2}{5}$ en $-\frac{1}{5}a^2 + 2a = 4\frac{1}{5}$ 1
- $\frac{1}{5}a - 1 = \frac{2}{5}$ geeft $a = 7$ 1
- $a = 7$ invullen in $-\frac{1}{5}a^2 + 2a$ geeft $4\frac{1}{5}$ (en dus is de raaklijn aan de parabool in $(4, 5\frac{4}{5})$ een van de lijnen AB) 1

Vraag	Antwoord	Scores

Jupiter en Aarde

16 **maximumscore 3**

- Per jaar legt Aarde $2\pi \cdot 150$ miljoen km af — 1
- Een jaar telt $365 \cdot 24$ uur — 1
- De snelheid is (ongeveer) $108\,000$ (km/uur) — 1

17 **maximumscore 3**

- $\sqrt{26-10\cos(\frac{11}{6}\pi t)} = 5$ — 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden — 1
- Het gevraagde tijdstip is $t \approx 0,26$ — 1

18 **maximumscore 5**

- De snelheid is de afgeleide van $\sqrt{26-10\cos(\frac{11}{6}\pi t)}$ — 1
- De afgeleide van $26-10\cos(\frac{11}{6}\pi t)$ is $\frac{110}{6}\pi \cdot \sin(\frac{11}{6}\pi t)$ — 1
- De afgeleide van $\sqrt{26-10\cos(\frac{11}{6}\pi t)}$ is $\dfrac{\frac{110}{6}\pi \cdot \sin(\frac{11}{6}\pi t)}{2\sqrt{26-10\cos(\frac{11}{6}\pi t)}}$ — 2
- Op tijdstip $t = 3$ is de snelheid (waarmee de afstand afneemt ongeveer) 5,65 (AE/jaar) (of: op tijdstip $t = 3$ is de snelheid (ongeveer) –5,65 (AE/jaar)) — 1

Opmerking
Als de kettingregel niet gebruikt is, maximaal 3 punten toekennen.

19 **maximumscore 5**

- Er geldt dan $\cos 2\pi t = \cos\frac{1}{6}\pi t$ en $\sin 2\pi t = \sin\frac{1}{6}\pi t$ — 2
- Beschrijven hoe de kleinste positieve oplossing van deze vergelijkingen gevonden kan worden — 2
- Het eerstvolgende tijdstip na $t = 0$ dat aan beide vergelijkingen voldoet, is $t = \frac{12}{11}$ (of $t \approx 1,091$) — 1