

Over een parabool gespannen

1. Lijn RS is de raaklijn aan $f(x)$ in het punt R . Het eerste wat je dus moet doen, is de formule van de raaklijn opstellen. Eerst bereken je de afgeleide van $f(x)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= 3 - x^2 \\f'(x) &= -2x\end{aligned}$$

Nu gebruik je de afgeleide om de richtingscoëfficiënt in punt R te berekenen. R ligt op $x = 1$, dus je krijgt:

$$f'(1) = -2 \cdot 1 = -2$$

De raaklijn heeft dus de formule (met onbekende b):

$$y = -2x + b$$

Nu moet je erachter zien te komen wat b is. De raaklijn gaat door punt R . Daar geldt $x = 1$ en $y = 2$. Dit vul je in in de vorige formule:

$$\begin{aligned}2 &= -2 \cdot 1 + b \\b &= 4\end{aligned}$$

De raaklijn heeft dus de formule:

$$y = -2x + 4$$

En het laatste wat je moet doen is aantonen dat deze lijn de x-as snijdt bij $x = 2$. Je vult $x = 2$ in:

$$\begin{aligned}y(2) &= -2 \cdot 2 + 4 \\y(2) &= 0\end{aligned}$$

En inderdaad, bij $x = 2$ geldt $y = 0$, dus hij snijdt de x-as in $x = 2$.

2. Eerst deel je het touwtje op in drie stukken: PQ , QR en RS . Van twee van deze stukken kan je de lengte makkelijk berekenen, namelijk van PQ en RS . Je gebruikt de stelling van pythagoras:

$$\begin{aligned}PQ &= RS = \sqrt{1^2 + 2^2} \\PQ &= RS = \sqrt{5}\end{aligned}$$

De lengte van QR is wat ingewikkelder. Op de formulekaart kan je deze formule vinden:

$$QR = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Je kent de grenzen a en b , en je kent $f'(x)$, dus die kun je gewoon invullen:

$$QR = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (-2x)^2} dx$$

Deze integraal kan je niet algebraïsch oplossen. Je moet dit dus met de GR doen. Ik laat hier zien hoe het op de Ti-84 plus moet. Op de casio kan de notatie afwijken, maar de methode is hetzelfde. Je plot een grafiek:

$$y_1 = \sqrt{1 + 4x^2}$$

Dan gebruik je de functie $\int f(x)dx$ om de integraal te benaderen. Je vindt:

$$QR = 2.958$$

Hierbij tel je de lengte van PQ en RS bij op om de lengte l van het touwtje te krijgen. Deze lengtes waren beide $\sqrt{5}$.

$$l = 2.958 + 2 \cdot \sqrt{5} = 7.43$$

3. Eerst reken je het snijpunt van de parabool met de x-as uit:

$$3 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3} \vee x = -\sqrt{3}$$

De gevraagde oppervlakte is de oppervlakte onder lijn RS min de oppervlakte onder $f(x)$ van $x = 1$ tot $x = \sqrt{3}$. De oppervlakte onder lijn RS is makkelijk te berekenen. Het is gewoon een driehoek, dus er geldt $A = \frac{1}{2}$ basis·hoogte.

$$A_{\text{onder driehoek}} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

De oppervlakte onder $f(x)$ moet met een integraal berekend worden.

$$A_{\text{onder } f(x)} = \int_1^{\sqrt{3}} f(x) dx$$

$$A_{\text{onder } f(x)} = \int_1^{\sqrt{3}} 3 - x^2 dx$$

$$A_{\text{onder } f(x)} = \left[3x - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^{\sqrt{3}}$$

$$A_{\text{onder } f(x)} = 3\sqrt{3} - \frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 - 3 \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1^3$$

$$A_{\text{onder } f(x)} = 3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\frac{2}{3}$$

$$A_{\text{onder } f(x)} = 2\sqrt{3} - 2\frac{2}{3}$$

De gevraagde oppervlakte is nu de oppervlakte onder de driehoek min de oppervlakte onder $f(x)$, oftewel:

$$A_{\text{gevraagd}} = 1 - 2\sqrt{3} + 2\frac{2}{3}$$

$$A_{\text{gevraagd}} = 3\frac{2}{3} - 2\sqrt{3}$$