

Landing

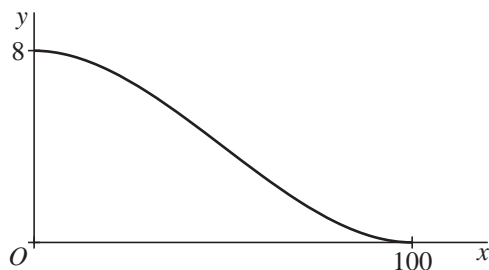
In deze opgave bekijken we een eenvoudig wiskundig model van de baan van een vliegtuig bij de landing.

Een vliegtuig vliegt op een hoogte van 8 km. Op een afstand van 100 km van het vliegveld (horizontaal gemeten) wordt het landingsproces ingezet.

We tekenen de baan van het vliegtuig in een assenstelsel: x is de afstand (in km, horizontaal gemeten) vanaf het punt waar het landingsproces wordt ingezet en y is de hoogte (in km).

De piloot begint het landingsproces in het punt $(0, 8)$ en het vliegtuig komt in het punt $(100, 0)$ op de grond. Zie figuur 1.

figuur 1



De baan die het vliegtuig tijdens het landingsproces beschrijft, wordt in het assenstelsel bij benadering gegeven door: $y = 8 - 2,4 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 1,6 \cdot 10^{-5} \cdot x^3$

- 4p 1 Toon langs algebraïsche weg aan dat volgens bovenstaande formule het vliegtuig zowel in het punt $(0, 8)$ als in het punt $(100, 0)$ een horizontale bewegingsrichting heeft.

De snelheid in horizontale richting is tijdens het gehele landingsproces 500 km/u.

Er geldt dus: $x = 500t$, waarbij t het aantal uren na het inzetten van de landing is en $0 \leq t \leq 0,2$.

Voor de hoogte y geldt: $y = 8 - 600 \cdot t^2 + 2000 \cdot t^3$.

- 3p 2 Toon dit aan.

Om veiligheidsredenen mag de absolute waarde van de verticale versnelling $y''(t)$ tijdens het landingsproces niet groter zijn dan 1200 km/u^2 .

- 4p 3 Onderzoek of aan deze eis voldaan is.

Schijn bedriegt

In een speelhal kun je het volgende spel spelen. In een vaas zitten 7 ballen: 4 witte en 3 zwarte. Een speler doet willekeurig een greep van drie ballen uit de vaas. Voor elke witte bal in zijn greep ontvangt hij 1 euro (en voor een zwarte bal ontvangt hij niets). De inzet die de speler aan de speelhal moet betalen is € 1,75 per spel.

Per keer spelen ontvangt een speler dus 0, 1, 2 of 3 euro. De kansen op deze vier mogelijke bedragen zijn achtereenvolgens: $\frac{1}{35}$, $\frac{12}{35}$, $\frac{18}{35}$ en $\frac{4}{35}$.

- 4p **4** Toon aan dat de kans op 2 euro inderdaad $\frac{18}{35}$ is.

Iemand besluit het spel zestien keer te spelen. Hij maakt in een spel winst als hij meer dan € 1,75 ontvangt. De kans dat hij ten minste tien keer winst zal maken is groter dan $\frac{1}{2}$.

- 4p **5** Bereken de kans dat hij ten minste tien keer winst zal maken.

Het lijkt dus wel gunstig voor een speler om het spel te spelen. Maar, schijn bedriegt!

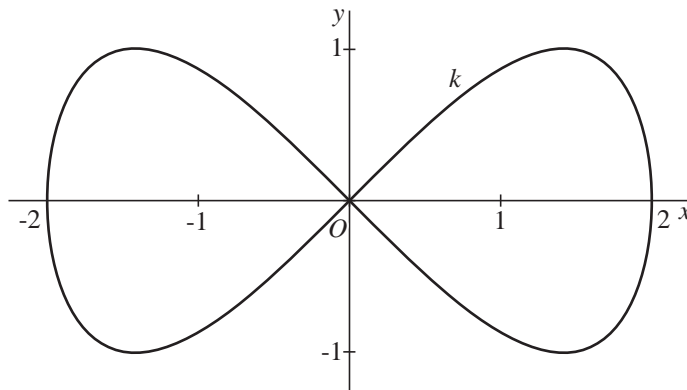
- 4p **6** Toon aan dat de speelhal op de lange termijn toch winst zal maken met dit spel.

Een achtkromme

In figuur 2 is in een assenstelsel de kromme k getekend, gegeven door

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases} \quad \text{met } 0 \leq t \leq 2\pi$$

figuur 2



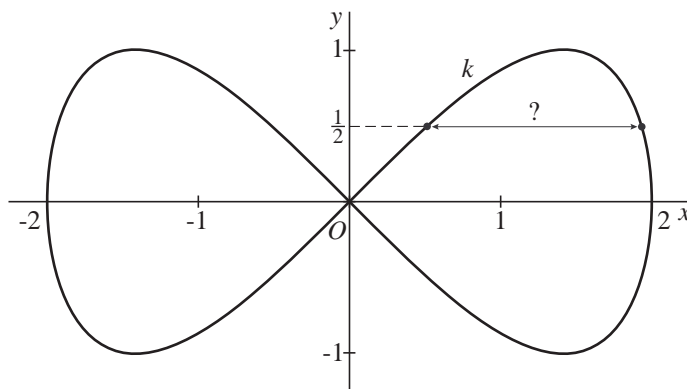
Deze kromme is symmetrisch ten opzichte van de x -as en de y -as.

De kromme k heeft vier punten waarin de raaklijn horizontaal loopt. Deze vier punten zijn de hoekpunten van een rechthoek.

- 5p 7 Bereken in één decimaal nauwkeurig de oppervlakte van deze rechthoek.

Er zijn twee punten met positieve x -coördinaat op k waarvan de y -coördinaat gelijk is aan $\frac{1}{2}$. Zie figuur 3.

figuur 3



- 4p 8 Bereken in één decimaal nauwkeurig hoe ver die twee punten van elkaar liggen.

- 5p 9 Bereken in één decimaal nauwkeurig de lengte van de kromme k .

Heupoperaties

Patiënten lopen na een operatie in het ene ziekenhuis veel meer gevaar een infectie te krijgen dan in het andere. In het jaar 2003 werden in een bepaald ziekenhuis 120 heupoperaties uitgevoerd, waarna 6 patiënten een infectie kregen. De directie vond het percentage van 5% infectiegevallen te hoog en nam extra preventieve maatregelen. In 2004 werden 154 heupoperaties uitgevoerd, met nu 2 infectiegevallen. Men vroeg zich af of dit betere resultaat toeval was of door de extra preventieve maatregelen kwam.

- 3p **10** Bereken de kans op hoogstens 2 infectiegevallen bij 154 operaties voor het geval dat de kans op infectie per operatie 0,05 is.

Omdat de zojuist berekende kans klein is, neemt men aan dat na de extra preventieve maatregelen de kans op infectie na een operatie is afgenomen. De kans op infectie na een operatie na de extra preventieve maatregelen noemen we p .

- 4p **11** Bereken voor welke waarde van p geldt: de kans op hoogstens 2 infectiegevallen bij 154 patiënten is 0,05.

De afgelopen vijf jaar was de verpleegduur in Nederlandse ziekenhuizen voor heupoperaties ongeveer normaal verdeeld met een gemiddelde van 4,5 dagen en een standaardafwijking van 1,8 dagen.

Enkele chirurgen hebben de laatste tijd bij heupoperaties een infectieremmend medicijn toegediend. Een zorgverzekeraar beweert dat door behandeling met dit medicijn de gemiddelde verpleegduur korter is dan 4,5 dagen. Men neemt een aselechte steekproef van 100 patiënten die behandeld zijn met het medicijn. Van deze 100 patiënten blijkt de gemiddelde verpleegduur 4,1 dagen te zijn. De standaardafwijking van de gemiddelde verpleegduur van n patiënten is

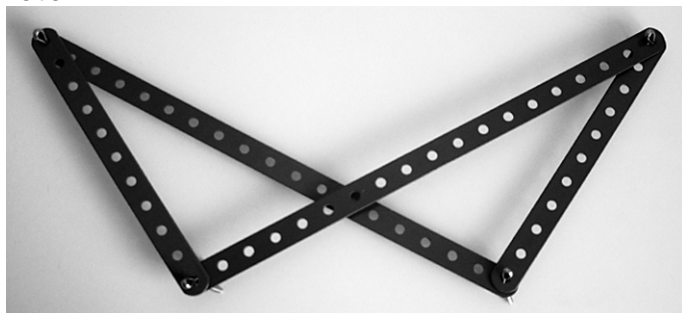
$\frac{1,8}{\sqrt{n}}$ dagen.

- 6p **12** Onderzoek of door de uitkomst 4,1 dagen de zorgverzekeraar bij een significantieniveau van 5% gelijk krijgt.

Stangenvlinders

Een constructie bestaat uit twee stangen van lengte 18 cm en twee stangen van lengte 10 cm die scharnierend aan elkaar zijn bevestigd. Zie de foto. We verwaarlozen de breedte en de dikte van de stangen en bekijken alleen de vormen waarbij de lange stangen over elkaar heen liggen.

foto

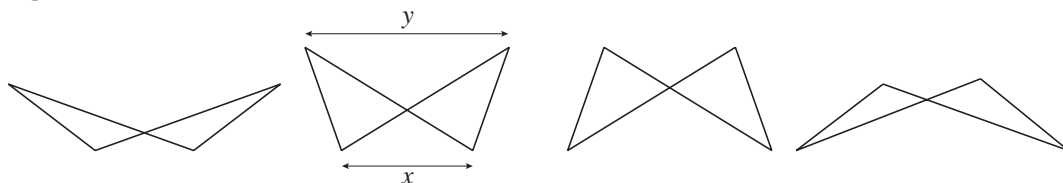


In figuur 4 hieronder zie je een aantal mogelijke vormen getekend; zulke vormen noemen we stangenvlinders.

De afstand tussen de scharnierpunten aan de onderkant noemen we x , die aan de bovenkant y , met x en y in cm.

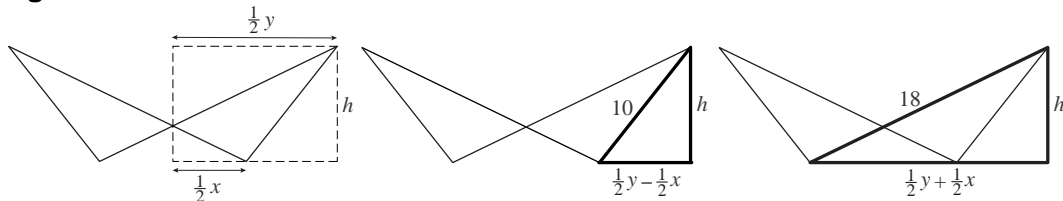
Als x maximaal is, en dus y minimaal, liggen de vier lijnstukken op één lijn. In die situatie zijn x en y achtereenvolgens 28 en 8.

figuur 4



In figuur 5 zijn bij een stangenvlinder met hoogte h twee rechthoekige driehoeken getekend.

figuur 5

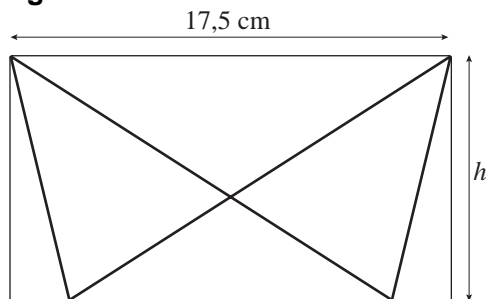


Door in elk van de vet getekende driehoeken h^2 uit te drukken in x en y kun je afleiden dat $y = \frac{224}{x}$.

6p 13 Geef deze afleiding.

De stangenvlinder past precies op de rechthoekige bodem van een doosje met lengte 17,5 cm, zoals getekend in figuur 6.

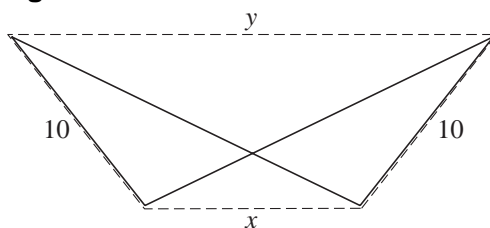
figuur 6



- 4p **14** Bereken de breedte h van de bodem van dit doosje.

We spannen een elastiek om de stangenvlinder. In figuur 7 is het elastiek gestippeld getekend. Het elastiek kan wrijvingsloos over de scharnierpunten en langs de stangen glijden zodat de stangenvlinder in een stand gedwongen wordt waarbij de lengte van het elastiek rondom de stangenvlinder minimaal is.

figuur 7



- 5p **15** Toon langs algebraïsche weg aan dat dit het geval is als de hoekpunten van de stangenvlinder een rechthoek vormen.

Vier vragen over $f(x) = \ln x$

De functie f is gegeven door $f(x) = \ln x$.

- 3p **16** Bereken exact voor welke waarden van x geldt: $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

Het punt $E(e, 1)$ ligt op de grafiek van f . Zie figuur 8.

De raaklijn in E aan de grafiek van f gaat door O .

- 3p **17** Toon dit aan.

Het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f , het lijnstuk OE en de x -as is in figuur 9 grijs aangegeven.

- 4p **18** Bereken exact de oppervlakte van dit gebied.

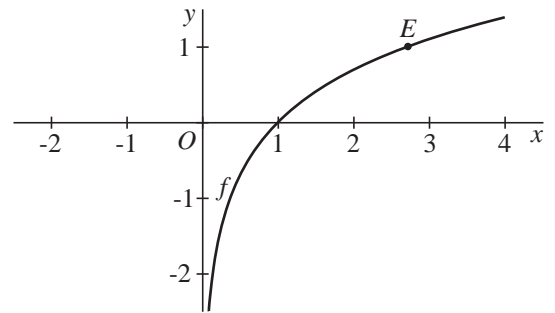
Voor elke waarde van x met $0 < x < 1$ ligt het punt $P(x, \ln x)$ op de grafiek van f .

We bekijken rechthoeken waarvan twee zijden op de assen liggen en waarvan P een hoekpunt is. Zie figuur 10.

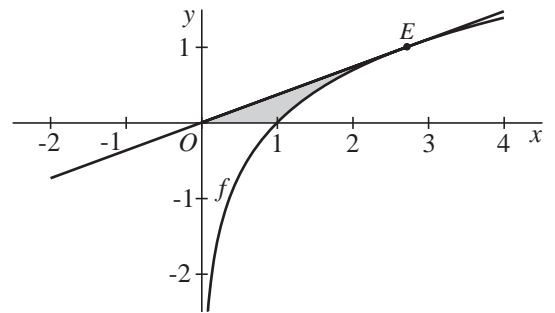
Er is een waarde van x waarvoor de oppervlakte van de rechthoek maximaal is.

- 6p **19** Bereken langs algebraïsche weg de exacte waarde van die maximale oppervlakte.

figuur 8



figuur 9



figuur 10

