Bier tappen

Rob neemt elke vrijdagmiddag, voor hij naar huis gaat, één glas bier in zijn stamcafé. Dan kiest hij óf een glas witbier óf een glas pils. Omdat hij moeilijk kan kiezen, gooit hij met twee geldstukken om zijn keuze te bepalen. Gooit hij twee keer 'kop', dan bestelt hij een glas witbier. In de andere gevallen bestelt hij een glas pils.

4p **1** Bereken de kans dat hij op ten hoogste drie van zes achtereenvolgende vrijdagmiddagen een glas witbier bestelt.

Bij het tappen van bier treden verschillen op in de hoeveelheid bier per glas. Uit onderzoek blijkt dat de hoeveelheid bier die per glas getapt wordt bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 180 ml en een standaardafwijking van 15,5 ml.

Iemand bestelt voor een rondje twaalf glazen tapbier.

5p **2** Bereken de kans dat bij het rondje ten hoogste twee glazen zitten met minder dan 175 ml bier.

Ook de totale hoeveelheid getapt bier van het rondje is bij benadering normaal verdeeld, met standaardafwijking $\sqrt{12} \cdot 15{,}5$ ml.

4p **3** Bereken de kans dat de totale hoeveelheid getapt bier van het rondje meer dan 90 ml minder is dan je zou mogen verwachten.

Een medicijn toedienen

Als een patiënt een dosis van een medicijn toegediend krijgt, zal de concentratie van dit medicijn in het bloed eerst toenemen en daarna afnemen.
Van een bepaald medicijn wordt de concentratie C (in mg/cm^3) in het bloed gegeven door de formule:

$$C(t) = 0{,}12 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$$

Hierbij is t het aantal uren na het toedienen van één dosis van het medicijn.

Van dit medicijn is bekend dat het werkzaam is zolang C groter is dan 0,035 mg/cm^3.
De tijd dat het medicijn werkzaam is bij 1 keer toedienen is minder dan 6 uur.

4p **4** Bereken in minuten nauwkeurig hoe lang het medicijn in dit geval werkzaam is.

Er geldt: $C'(t) = 0{,}12 \cdot (1 - 0{,}5t) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5t}$

4p **5** Toon dit aan.

Er is een tijdstip waarop de concentratie het sterkst afneemt.

4p **6** Bereken dit tijdstip.

Het medicijn wordt in gelijke doses toegediend met tussenpozen van 6 uur. Omdat 6 uur na de eerste keer toedienen van het medicijn een tweede dosis wordt toegediend, geldt vanaf $t = 6$ tot $t = 12$ de volgende formule voor de concentratie C^* (in mg/cm^3) van het medicijn in het bloed:

$$C^*(t) = C(t) + C(t-6)$$

Bij elke nieuwe dosis verandert de formule voor de concentratie van het medicijn in het bloed.
In elke periode van 6 uur heeft de concentratie van het medicijn in het bloed een maximale waarde. De maximale waarde wordt in elke volgende periode van 6 uur iets groter.
Het medicijn kan schadelijke gevolgen hebben als de concentratie boven de 0,11 mg/cm^3 komt.

4p **7** Onderzoek of dit het geval is binnen 24 uur na het begin van het toedienen van het medicijn.

Controle op spieken bij multiple choice

Een toets bestaat uit tien meerkeuzevragen. Elke vraag heeft drie alternatieven, waarvan er precies één het juiste antwoord op de vraag geeft.
Elke leerling maakt een lijstje met antwoorden. Bij het nakijken wordt er een controle op spieken uitgevoerd.

We werken in deze opgave met het volgende model voor leerlingen die goed voorbereid meedoen aan de toets:
- de kans dat ze bij een vraag het juiste antwoord kiezen is 0,8
- de kans dat ze bij een vraag het ene onjuiste alternatief kiezen is 0,1
- de kans dat ze bij een vraag het andere onjuiste alternatief kiezen is ook 0,1

Een leerling die goed geleerd heeft, en dus aan bovenstaand model voldoet, maakt de toets.

4p **8** Bereken de kans dat ten minste één van de tien vragen door hem fout wordt beantwoord.

Twee leerlingen die beiden goed geleerd hebben, en dus aan bovenstaand model voldoen, maken de toets. De kans dat zij bij een willekeurige vraag hetzelfde antwoord geven is 0,66.

4p **9** Toon dit aan.

De twee leerlingen blijken precies hetzelfde antwoordenlijstje ingeleverd te hebben. Ze hebben dus allebei dezelfde vragen goed beantwoord en bij de fout beantwoorde vragen hebben ze hetzelfde foute alternatief gekozen.
De docent vraagt zich af of er gespiekt is. Hij berekent de kans dat twee leerlingen die zich beiden goed op de toets hebben voorbereid en die *niet* gespiekt hebben, *toch* precies dezelfde antwoordenlijstjes inleveren. Als deze kans kleiner is dan 1%, zal de docent concluderen dat er gespiekt is en een strafmaatregel treffen. Als deze kans 1% of groter is, zal hij geen strafmaatregel treffen.

4p **10** Zal de docent een strafmaatregel treffen? Licht je antwoord toe.

Bewegende schaduw

Bij een practicumproef draait een doorzichtige cirkelvormige schijf in een verticaal vlak om zijn middelpunt M. Deze schijf heeft een straal van 1 meter. Tussen twee punten op de rand van de schijf wordt een staaf AB met lengte 1 meter bevestigd. De punten op de rand van de schijf hebben een constante snelheid van 1 m/s. Het geheel wordt beschenen door een bundel verticaal invallende evenwijdige lichtstralen. In deze opgave bekijken we de lengte van de schaduw $A'B'$ van de staaf op de grond.

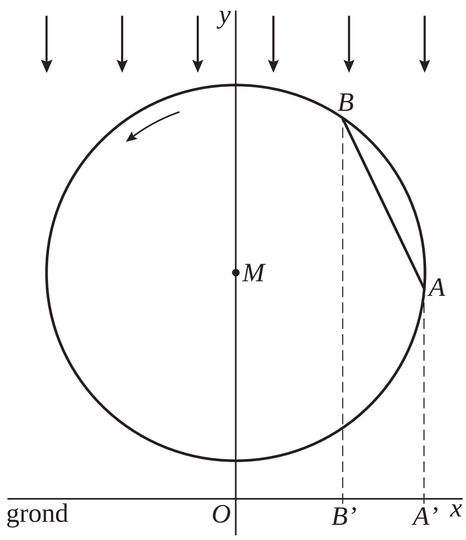
We maken een wiskundig model bij deze proef. We kiezen het assenstelsel in het draaivlak van de schijf, met de x-as langs de grond en de y-as door het middelpunt M van de schijf. De bewegingsvergelijkingen van A en B zijn:

$$\begin{cases} x_A = \cos(t - \frac{1}{6}\pi) \\ y_A = 1\frac{1}{5} + \sin(t - \frac{1}{6}\pi) \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x_B = \cos(t + \frac{1}{6}\pi) \\ y_B = 1\frac{1}{5} + \sin(t + \frac{1}{6}\pi) \end{cases}$$

Hierbij zijn x en y in meter en is t in seconde.

In figuur 1 staat een vooraanzicht van de situatie op een zeker tijdstip.

figuur 1



De lengte (in meter) van de schaduw $A'B'$ op tijdstip t noemen we $l(t)$.
Voor elke waarde van t tussen 0 en π geldt: $l(t) = \sin t$.

5p **11** Toon dit langs algebraïsche weg aan.

Om de gemiddelde schaduwlengte g van AB (in meter) te berekenen, kunnen we ons beperken tot een halve omwenteling: $0 \le t \le \pi$.

g kan berekend worden met een integraal: $g = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} l(t)\,dt$.

Er geldt: $g = \frac{2}{\pi}$.

4p **12** Toon dit langs algebraïsche weg aan.

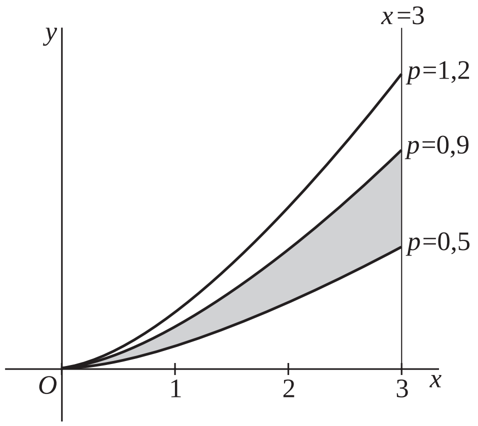
We vergelijken de delen van de omwentelingstijd waarvoor $l(t) > \frac{2}{\pi}$ en waarvoor $l(t) < \frac{2}{\pi}$. We kunnen ons weer beperken tot een halve omwenteling: $0 \le t \le \pi$.

5p **13** Onderzoek of deze delen even groot zijn.

Een familie van functies

Voor elke $p > 0$ is de functie f_p gedefinieerd door $f_p(x) = p \cdot x^{1\frac{1}{2}}$ met domein [0, 3].
In figuur 2 is de grafiek van f_p getekend voor $p = 0,5$, voor $p = 0,9$ en voor $p = 1,2$.

figuur 2



Het vlakdeel G, ingesloten door de grafiek van $f_{0,5}$, de grafiek van $f_{0,9}$ en de lijn $x = 3$, is in figuur 2 met grijs aangegeven.

4p **14** Bereken de oppervlakte van G in twee decimalen nauwkeurig.

We kiezen p = 2. We wentelen het vlakdeel, begrensd door de x-as, de lijn $x = 3$ en de grafiek van f_2 om de x-as.

4p **15** Bereken exact de inhoud van het omwentelingslichaam dat dan ontstaat.

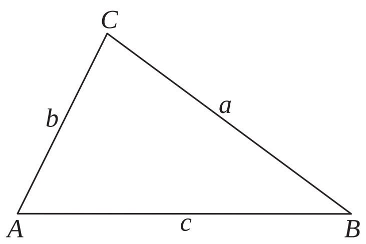
$L(p)$ is de lengte van de grafiek van f_p.

6p **16** Bereken $L\left(\frac{2}{3}\right)$ exact.

De formule van Heron

In de eerste eeuw van onze jaartelling schreef de Egyptenaar Heron een werk waarin hij een formule gaf voor de oppervlakte van een driehoek. Hij deed dit als volgt.
Noem de lengtes van de zijden van de driehoek a, b en c. Zie figuur 3.

figuur 3



Noem de halve omtrek van de driehoek s. Dus $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.

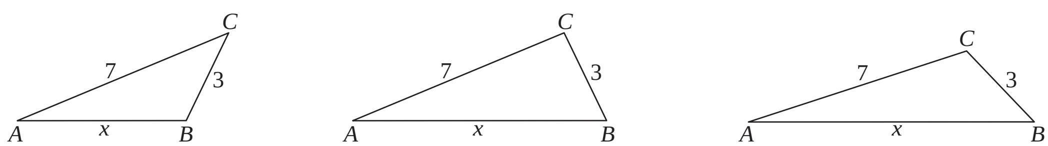
Een formule voor de oppervlakte H van de driehoek is dan:
$H = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Deze formule wordt *de formule van Heron* genoemd.

4p **17** Toon aan dat deze formule de juiste uitkomst geeft voor de oppervlakte van een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5.

In het vervolg van deze opgave gebruiken we dat de formule van Heron voor elke driehoek geldt.
We bekijken driehoeken ABC met $AC = 7$ en $BC = 3$. De lengte van de derde zijde AB noemen we x, met $4 < x < 10$. In figuur 4 zijn drie van dergelijke driehoeken getekend.

figuur 4



Voor de oppervlakte H van zo'n driehoek ABC geldt:

$$H(x) = \sqrt{\left(25 - \tfrac{1}{4}x^2\right)\left(\tfrac{1}{4}x^2 - 4\right)}$$

5p **18** Toon dit aan met behulp van de formule van Heron.

Er is één waarde van x waarvoor de oppervlakte van driehoek ABC maximaal is.

3p **19** Bereken deze waarde van x.