Kansrekening

Tellen

$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

$0! = 1$

$\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Binomium van Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n-k}$

Kansrekening

Voor toevalsvariabelen X en Y geldt: $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

Voor onafhankelijke toevalsvariabelen X en Y geldt: $\sigma(X+Y) = \sqrt{\sigma^2(X) + \sigma^2(Y)}$

$\sqrt{n}$-wet : bij een serie van n onafhankelijk van elkaar herhaalde experimenten geldt voor de som S en het gemiddelde $\overline{X}$ van de uitkomsten X:

$E(S) = n \cdot E(X)$ $\quad$ $\sigma(S) = \sqrt{n} \cdot \sigma(X)$

$E(\overline{X}) = E(X)$ $\quad$ $\sigma(\overline{X}) = \dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Binomiale verdeling

Voor de binomiaal verdeelde toevalsvariabele X, waarbij n het aantal experimenten is en p de kans op succes per keer, geldt:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ met $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Verwachting: $E(X) = n \cdot p$

Variantie: $\mathrm{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

Standaardafwijking: $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Normale verdeling

Voor een toevalsvariabele X die normaal verdeeld is met gemiddelde μ en standaardafwijking σ geldt:

$Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ is standaard normaal verdeeld en

$P(X < g) = P\left(Z < \frac{g-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{g-\mu}{\sigma}\right)$

Hierin is Φ de cumulatieve verdelingsfunctie van de standaardnormale verdeling.

Algebra en verbanden

Vergelijkingen

vergelijking	oplossing	voorwaarde
$ax^2 + bx + c = 0$	$x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ of $x = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ met $D = b^2 - 4ac$	$a \neq 0,\ D \geq 0$
$x^n = c$	$x = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{c}$	$c > 0,\ n > 0$
$g^x = a$	$x = {}^g\log a = \frac{\log a}{\log g}$	$a > 0,\ g > 0,\ g \neq 1$
${}^g\log x = b$	$x = g^b$	$g > 0,\ g \neq 1$
$\mathrm{e}^x = a$	$x = \ln a$	$a > 0$
$\ln x = b$	$x = \mathrm{e}^b$	

Machten en logaritmen

regel	voorwaarde
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a > 0$
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$	$a > 0,\ n > 0$
$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$a > 0$
$a^p : a^q = a^{p-q}$	$a > 0$
$(a^p)^q = a^{pq}$	$a > 0$
$(ab)^p = a^p \cdot b^p$	$a > 0,\ b > 0$
${}^g\log a = \frac{{}^p\log a}{{}^p\log g}$	$g > 0, g \neq 0, a > 0, p > 0, p \neq 1$
${}^g\log a + {}^g\log b = {}^g\log ab$	$g > 0, g \neq 1, a > 0, b > 0$
${}^g\log a - {}^g\log b = {}^g\log \frac{a}{b}$	$g > 0, g \neq 1,\ a > 0, b > 0$
${}^g\log a^p = p \cdot {}^g\log a$	$g > 0,\ g \neq 1, a > 0$

Verbanden

Lineair verband	
$H = b + a \cdot t$	b is de beginwaarde en a is de helling of richtingscoëfficiënt
Exponentieel verband	
$H = b \cdot g^t$	b is de beginwaarde en g is de groeifactor
Harmonische trilling	d is de evenwichtsstand, (c, d) is een beginpunt,
$H = d + a \cdot \sin b(t-c)$ of $H = d - a \cdot \sin b(t-c)$	$\frac{2\pi}{b}$ is de periode, a is de amplitude en $a > 0,\ b > 0$

Somformules voor rijen

Voor de som S van de rekenkundige rij $a,\ a+v,\ a+2v,\ \ldots,\ a+(n-1)v$ geldt:

$$S = n \cdot \frac{\text{eerste term} + \text{laatste term}}{2}$$

Voor de som S van de meetkundige rij $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots,\ ar^{n-1}$ geldt:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

Voor de som S van de oneindige meetkundige rij $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ \ldots$ met $-1 < r < 1$ geldt:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a \cdot \frac{1}{1-r}$$

Differentievergelijkingen

recursievergelijking	directe formule
$u(n+1) = a \cdot u(n) + b$ met beginwaarde $u(0)$	$u(n) = \frac{b}{1-a} + \left(u(0) - \frac{b}{1-a}\right) \cdot a^n$ of $u(n) = U + a^n \cdot \left(u(0) - U\right)$ met $U = \frac{b}{1-a}$ Als $-1 < a < 1$, dan geldt: $\lim\limits_{n\to\infty} u(n) = \frac{b}{1-a}$
exponentiële groei $u(n+1) = a \cdot u(n)$	$u(n) = u(0) \cdot a^n$
logistische groei $u(n+1) = u(n) + c \cdot u(n) \cdot \left(G - u(n)\right)$ waarbij G de grenswaarde is	

Differentiëren

naam van de regel	functie	afgeleide
constante maal f	$g(x) = c \cdot f(x)$	$g'(x) = c \cdot f'(x)$
somregel	$s(x) = f(x) + g(x)$	$s'(x) = f'(x) + g'(x)$
productregel	$p(x) = f(x) \cdot g(x)$	$p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
quotiëntregel	$q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$q'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
kettingregel	$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$ of $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g} \cdot \dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$

standaardfunctie	**afgeleide**
$f(x)=c$	$f'(x)=0$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=n\cdot x^{n-1}$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$f'(x)=\mathrm{e}^x$
$f(x)=g^x$ met $g>0$	$f'(x)=g^x\cdot\ln g$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)={}^g\log x$ met $g>0$ en $g\neq 1$	$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln g}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\tan x$	$f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$

Lineaire benadering van f in a: $L(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$

Integreren

functie	**primitieve**
$f(x)=x^n$ met $n\neq -1$	$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln\lvert x\rvert+c$
$f(x)=a^x$ met $a>0$	$F(x)=\frac{1}{\ln a}\cdot a^x+c$
$f(x)=\mathrm{e}^x$	$F(x)=\mathrm{e}^x+c$
$f(x)=\ln x$	$F(x)=x\ln x-x+c$
$f(x)={}^a\log x$ met $a>0$ en $a\neq 1$	$F(x)=\frac{1}{\ln a}\cdot(x\ln x-x)+c$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x+c$
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x+c$

Lengte van de grafiek van f op het interval $[a,b]$: $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$

Inhoud van een omwentelingslichaam dat ontstaat door de grafiek van de functie f op het interval $[a,b]$ om de x-as te wentelen: $I=\pi\cdot\int_a^b(f(x))^2\,\mathrm{d}x$

Goniometrie

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$	$\sin(-t) = -\sin t$	$\sin(\frac{1}{2}\pi - t) = \cos t$	$\sin(\pi - t) = \sin t$
$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}$	$\cos(-t) = \cos t$	$\cos(\frac{1}{2}\pi - t) = \sin t$	$\cos(\pi - t) = -\cos t$

$\sin 2t = 2\sin t \cos t$

$\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(t+u) = \sin t \cos u + \cos t \sin u$

$\sin t + \sin u = 2\sin\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$

$\sin(t-u) = \sin t \cos u - \cos t \sin u$

$\sin t - \sin u = 2\sin\frac{t-u}{2}\cos\frac{t+u}{2}$

$\cos(t+u) = \cos t \cos u - \sin t \sin u$

$\cos t + \cos u = 2\cos\frac{t+u}{2}\cos\frac{t-u}{2}$

$\cos(t-u) = \cos t \cos u + \sin t \sin u$

$\cos t - \cos u = -2\sin\frac{t+u}{2}\sin\frac{t-u}{2}$

$\sin\alpha = \sin\beta$ geeft $\alpha = \beta + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = \pi - \beta + k\cdot 2\pi$

$\cos\alpha = \cos\beta$ geeft $\alpha = \beta + k\cdot 2\pi$ of $\alpha = -\beta + k\cdot 2\pi$

Parameterkrommen

Als $(x(t), y(t))$ de positie in het Oxy-vlak geeft van een bewegend punt op tijdstip t, dan wordt de snelheidsvector op tijdstip t gegeven door $(x'(t), y'(t))$.

De snelheid van het punt op tijdstip t wordt gegeven door :

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

en de lengte van de afgelegde weg tussen de tijdstippen $t = a$ en $t = b$ door:

$$\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

Eenparige cirkelbeweging met middelpunt (m,n), straal r en hoeksnelheid ω :

$$\begin{cases} x(t) = m + r\cdot\cos\omega(t - t_0) \\ y(t) = n + r\cdot\sin\omega(t - t_0) \end{cases}$$

met $\omega = \frac{2\pi}{T}$, waarbij T de omlooptijd is.

Differentiaalvergelijkingen

differentiaalvergelijking	**oplossingen**
Exponentiële groei of verval $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c\cdot y$	$y(t) = y(0)\cdot \mathrm{e}^{ct}$
Begrensde groei $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c\cdot(K - y)$ met $c > 0$	$y(t) = K + (y(0) - K)\cdot \mathrm{e}^{-ct}$
Logistische groei $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c\cdot y\cdot(G - y)$	$y(t) = \frac{G}{1 + a\cdot \mathrm{e}^{-cGt}}$ met G de grenswaarde en $a = \frac{G - y(0)}{y(0)}$

Standaardlimieten

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ met $a > 1$	$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$	$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ met $a > 0$

Meetkunde

Rekenen in cirkels

omtrek cirkel	$2\pi r$	r is de straal
lengte cirkelboog met middelpuntshoek α (rad)	αr	r is de straal
oppervlakte cirkel	πr^2	r is de straal
oppervlakte cirkelsector met middelpuntshoek α (rad)	$\frac{1}{2}\alpha r^2$	r is de straal

Rekenen in driehoeken

Stelling van Pythagoras: Als driehoek ABC een rechte hoek in C heeft, dan geldt: $a^2+b^2=c^2$

Omgekeerde stelling van Pythagoras: Als in driehoek ABC geldt $a^2+b^2=c^2$, dan is hoek C recht

Cosinusregel: In elke driehoek ABC geldt $c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$

Sinusregel: In elke driehoek ABC geldt $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$

Vlakke meetkunde; lijst van definities en stellingen

De *cursief* gedrukte termen mogen als verwijzing in een bewijs gebruikt worden.

Meetkundige plaatsen

- De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee gegeven punten A en B is de middelloodlijn van het lijnstuk AB (*middelloodlijn*).
- De verzameling van alle punten binnen een hoek die dezelfde afstand hebben tot de benen van die hoek is de deellijn (bissectrice) van die hoek (*deellijn*).
- De verzameling van alle punten die afstand r tot een gegeven punt M hebben, is de cirkel met middelpunt M en straal r (*cirkel*).
- De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee elkaar snijdende lijnen, is het deellijnenpaar (bissectricepaar) van die twee lijnen (*deellijnenpaar*).
- De verzameling van alle punten die dezelfde afstand hebben tot twee evenwijdige lijnen, is de middenparallel van dat lijnenpaar (*middenparallel*).
- De verzameling van alle punten die gelijke afstand hebben tot een punt F en een lijn l is een parabool (*parabool*).

P op parabool met brandpunt F en richtlijn l $\Leftrightarrow$ $d(P,F)=d(P,l)$

P op ellips met brandpunten F_1 en F_2 $\Leftrightarrow$ $d(P,F_1)+d(P,F_2)$ = constant

P op hyperbool met brandpunten F_1 en F_2 $\Leftrightarrow$ $|d(P,F_1)-d(P,F_2)|$ = constant

Hoeken, lijnen en afstanden

De overstaande hoeken bij twee snijdende lijnen zijn gelijk (*overstaande hoeken*).

Als twee evenwijdige lijnen gesneden worden door een derde lijn, dan zijn de F-hoeken en Z-hoeken gelijk (*F-hoeken, Z-hoeken*).

Als twee lijnen in twee verschillende punten gesneden worden door een derde lijn waarbij er een paar gelijke F-hoeken of Z-hoeken optreedt, dan zijn die twee lijnen evenwijdig (*F-hoeken, Z-hoeken*).

Een *rechte hoek* is 90°, een *gestrekte hoek* is 180°.

De som van de hoeken van een driehoek is 180° (*hoekensom driehoek*).

De afstand (kortste verbinding) van een punt tot een lijn is de lengte van de loodlijn neergelaten vanuit dat punt op die lijn (*afstand punt tot lijn*).

Als drie punten A, B en C niet op één lijn liggen dan geldt: $AB + BC > AC$ (*driehoeksongelijkheid*).

Driehoeken

Gelijkbenige driehoek

- Als in een driehoek twee hoeken gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende zijden ook gelijk (*gelijkbenige driehoek*).
- Als in een driehoek twee zijden gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende hoeken ook gelijk (*gelijkbenige driehoek*).

Gelijke driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijk (congruent) als ze gelijk hebben:

- Een zijde en twee aanliggende hoeken. (*HZH*)
- Een zijde, een aanliggende hoek en de tegenoverliggende hoek. (*ZHH*)
- Twee zijden en de ingesloten hoek. (*ZHZ*)
- Alle zijden. (*ZZZ*)
- Twee zijden en de rechte hoek tegenover één van die zijden. (*ZZR*)

Gelijkvormige driehoeken

Twee driehoeken zijn gelijkvormig als ze gelijk hebben:

- Twee paren hoeken. (*hh*)
- Een paar hoeken en de verhouding van de omliggende zijden. (*zhz*)
- De verhouding van de zijden. (*zzz*)
- Een paar rechte hoeken en de verhouding van de twee niet-omliggende zijden. (*zzr*)

Vierhoeken

De som van de hoeken van een vierhoek is 360° (*hoekensom vierhoek*).

Equivalente definities en eigenschappen van een *parallellogram.*
- Het is een vierhoek met twee paren evenwijdige zijden.
- Het is een vierhoek met twee paren gelijke overstaande zijden.
- Het is een vierhoek waarin twee overstaande zijden gelijk zijn en evenwijdig.
- Het is een vierhoek waarin de diagonalen elkaar middendoor delen.

Equivalente definities en eigenschappen van een *ruit.*
- Het is een parallellogram met vier gelijke zijden.
- Het is een parallellogram waarin een diagonaal een hoek middendoor deelt.
- Het is een parallellogram waarin de diagonalen elkaar loodrecht snijden.

Equivalente definities en eigenschappen van een *rechthoek.*
- Het is een vierhoek met vier rechte hoeken.
- Het is een parallellogram met een rechte hoek.
- Het is een parallellogram met gelijke diagonalen.

Raaklijneigenschappen

De raaklijn in een punt P van een parabool maakt gelijke hoeken met de lijn die P verbindt met het brandpunt en de lijn door P loodrecht op de richtlijn (*raaklijneigenschap parabool*).

De raaklijn in een punt P van een ellips of hyperbool maakt gelijke hoeken met de lijnen die P verbinden met de twee brandpunten (*raaklijneigenschap ellips of hyperbool*).

Cirkeleigenschappen

- Bij gelijke bogen behoren gelijke koorden (*boog en koorde*).
- De loodlijn vanuit het middelpunt op een koorde deelt die koorde middendoor (*loodlijn op koorde*).
- *Stelling van Thales*: Als hoek C in driehoek ABC recht is, dan ligt C op de cirkel met middellijn AB.
- *Omgekeerde stelling van Thales*: Als C op de cirkel met middellijn AB ligt, dan is $\angle ACB$ recht.
- *Stelling van de omtrekshoek*: Elke omtrekshoek is half zo groot als de bijbehorende middelpuntshoek.
- De hoek tussen een raaklijn en een koorde is gelijk aan de bij die koorde behorende omtrekshoek (*hoek tussen koorde en raaklijn*).
- Als punt C over de cirkelboog AB tussen de punten A en B beweegt, dan verandert de grootte van $\angle ACB$ niet (*Stelling van de constante hoek*).
- Als punt D aan dezelfde kant van AB ligt als punt C en $\angle ADB = \angle ACB$, dan liggen C en D op dezelfde cirkelboog AB (*Omgekeerde stelling van de constante hoek*).
- *Koordenvierhoekstelling*: Als $ABCD$ een koordenvierhoek is, dan is de som van elk paar overstaande hoeken 180°
- *Omgekeerde koordenvierhoekstelling*: Als in een vierhoek de som van een paar overstaande hoeken 180° is, dan is het een koordenvierhoek.
- Een raaklijn aan een cirkel staat loodrecht op de verbindingslijn van middelpunt en raakpunt (*raaklijn*).