Groepsfoto's

Alle mensen knipperen met hun ogen. Daardoor staan op groepsfoto's vaak enkele personen met gesloten ogen. Svenson en Barnes hebben onderzocht hoeveel foto's je moet maken van een groep van n personen om 99% kans te hebben op een foto waarop niemand zijn ogen dicht heeft. Zij hebben bij hun berekeningen de volgende aannames gemaakt:

- Het knipperen met de ogen gebeurt met onregelmatige tussenpozen;
- Mensen knipperen gemiddeld tien keer per minuut met de ogen;
- Als iemand knippert, zijn de ogen gedurende 0,25 seconden dicht.

Op een willekeurig moment wordt één foto genomen van één persoon.
Op basis van de aannames van Svenson en Barnes kunnen we de kans berekenen dat deze persoon niet met gesloten ogen op de foto staat.

3p **1** Bereken deze kans in vier decimalen nauwkeurig.

In de rest van de opgave gaan we ervan uit dat de kans dat iemand met open ogen op de foto staat gelijk is aan 0,96. Bij een groepsfoto spreken we van een 'geslaagde' foto als alle personen op de foto hun ogen open hebben.

Een fotograaf neemt één groepsfoto van een groep van 20 personen.

3p **2** Bereken de kans op een geslaagde groepsfoto.

Een fotograaf neemt 5 groepsfoto's van een groep van 25 personen.
De kans dat er minstens één geslaagde foto bij zit is ongeveer 0,89.

5p **3** Toon dat met een berekening aan.

Als men F groepsfoto's maakt van een groep van 30 personen, wordt de kans P op minstens één geslaagde groepsfoto gegeven door de formule:

$$P = 1 - 0,7061^F$$

Een fotograaf wil dat bij een groep van 30 personen de kans op minstens één geslaagde groepsfoto groter is dan 98%.

3p **4** Bereken hoeveel foto's hij dan minstens moet maken.

Svenson en Barnes wilden nog meer zekerheid. Ze hebben het aantal foto’s berekend dat je van een groep moet maken om minstens 99% kans te hebben op ten minste één geslaagde foto.
Voor een groep van n personen kan dat aantal foto’s worden berekend met de formule:

$$F = \frac{-2}{\log\left(1-0,96^{n}\right)}$$

Wanneer je F naar boven afrondt op een geheel getal, krijg je het aantal foto’s dat je dan moet maken.
Uit de formule volgt dat je van een groep van twee personen twee foto’s moet maken en van een groep van drie personen drie foto’s.
Ook voor een grote groep kan het benodigde aantal foto’s net zo groot zijn als het aantal personen in de groep.

3p **5** Bereken uit hoeveel personen de groep dan moet bestaan.

Tandpasta

Drogisterijketen Haarsma verkoopt ‘Hagelwit’ tandpasta. Aan het eind van elke maand koopt Haarsma deze tandpasta in bij de groothandel. Haarsma moet daarvoor elke maand een schatting maken van het aantal tubes dat hij de volgende maand zal verkopen.
In de bedrijfskunde worden verschillende methoden gebruikt om zo’n schatting te maken. Een van die methoden komt in deze opgave aan de orde.

In zeker jaar heeft Haarsma in januari 5200 tubes verkocht en in februari 4000. Een eenvoudig model om de verkoop voor de komende maanden te schatten is het volgende: neem het gemiddelde van de verkoop in de twee voorafgaande maanden. In een formule:

$$V_{n+2} = \tfrac{1}{2}V_{n+1} + \tfrac{1}{2}V_n \text{, met } V_1 = 5200 \text{ en } V_2 = 4000$$

Hierbij is V_n het aantal verkochte tubes tandpasta in maand n, waarbij $n = 1$ overeenkomt met januari.
Volgens dit model verwacht Haarsma in maart 4600 tubes te verkopen.
Als we aannemen dat de schatting steeds de werkelijke verkoop in die maand is, kunnen we met dit model ook de verkoop van de volgende maanden uitrekenen. Dat betekent hier dat er in maart inderdaad 4600 tubes tandpasta verkocht worden. En met de getallen 4000 van februari en 4600 van maart kun je met de formule weer de verkoop van april berekenen, enzovoort.

3p **6** Bereken het aantal tubes tandpasta dat volgens dit model in juni wordt verkocht.

Soms besluit men de laatste maand zwaarder te laten meetellen dan de voorlaatste maand. Bij de schatting voor de maand maart telt men bijvoorbeeld februari voor 60% mee en januari voor 40%. De formule wordt dan:

$$V_{n+2} = 0{,}6V_{n+1} + 0{,}4V_n \text{, met } V_1 = 5200 \text{ en } V_2 = 4000$$

Als met dit model een groot aantal maanden wordt doorgerekend, komen de waarden van V steeds dichter bij de evenwichtswaarde 4343 te liggen. Dat betekent dat na een aantal maanden de schattingen minder dan 1% van 4343 zullen afwijken.

4p **7** Bereken in welke maand de schatting voor het eerst minder dan 1% van 4343 afwijkt.

Een algemene vorm van het model ziet er als volgt uit:

$$V_{n+2} = a \cdot V_{n+1} + (1-a) \cdot V_n \text{, met } V_1 = 5200 \text{ en } V_2 = 4000$$

Hierbij is a een getal tussen 0 en 1.
Wanneer we $a = \frac{1}{2}$ kiezen, krijgen we het model uit het begin van deze opgave.
Als $a = 0,6$ hebben we het model van de vorige vraag.
De schatting van de verkoop voor de maanden na februari hangt nu af van de waarde van a. Zo kunnen we bijvoorbeeld V_4, de schatting voor april, uitdrukken in a. Dat levert de volgende formule op:

$$V_4 = -1200a^2 + 1200a + 4000$$

4p **8** Laat zien hoe deze formule uit de gegevens kan worden afgeleid.

4p **9** Bereken voor welke waarden van a de schatting voor april groter is dan 4260.

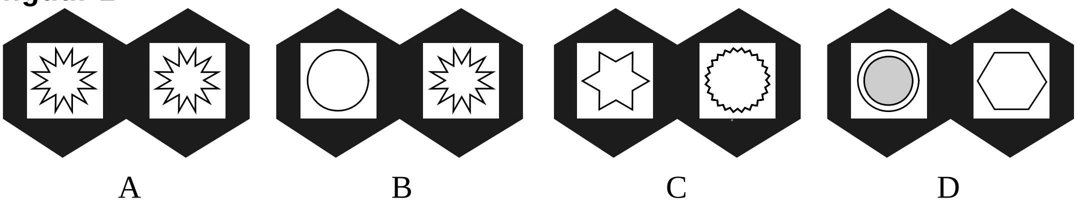
Als we $a = 1$ invullen in de formule van V_4, levert dat als uitkomst $V_4 = 4000$.

3p **10** Toon aan dat dit aantal van 4000 ook uit de recursieve formule volgt.

Genius

Genius is een bordspel voor 1 tot en met 4 spelers. Tijdens het spel moeten de spelers **tegels** op het speelveld plaatsen. Een tegel heeft de vorm van twee zeshoeken die met een zijde aan elkaar vast zitten. Deze tegels zitten in een zak.
Op elke tegel staan twee symbolen. Dat kunnen twee dezelfde symbolen of twee verschillende symbolen zijn. Er zijn zes verschillende symbolen: 12-puntige ster, cirkel, 6-puntige ster, zon, gevulde cirkel en zeshoek. In figuur 1 zijn vier tegels afgebeeld.

figuur 1

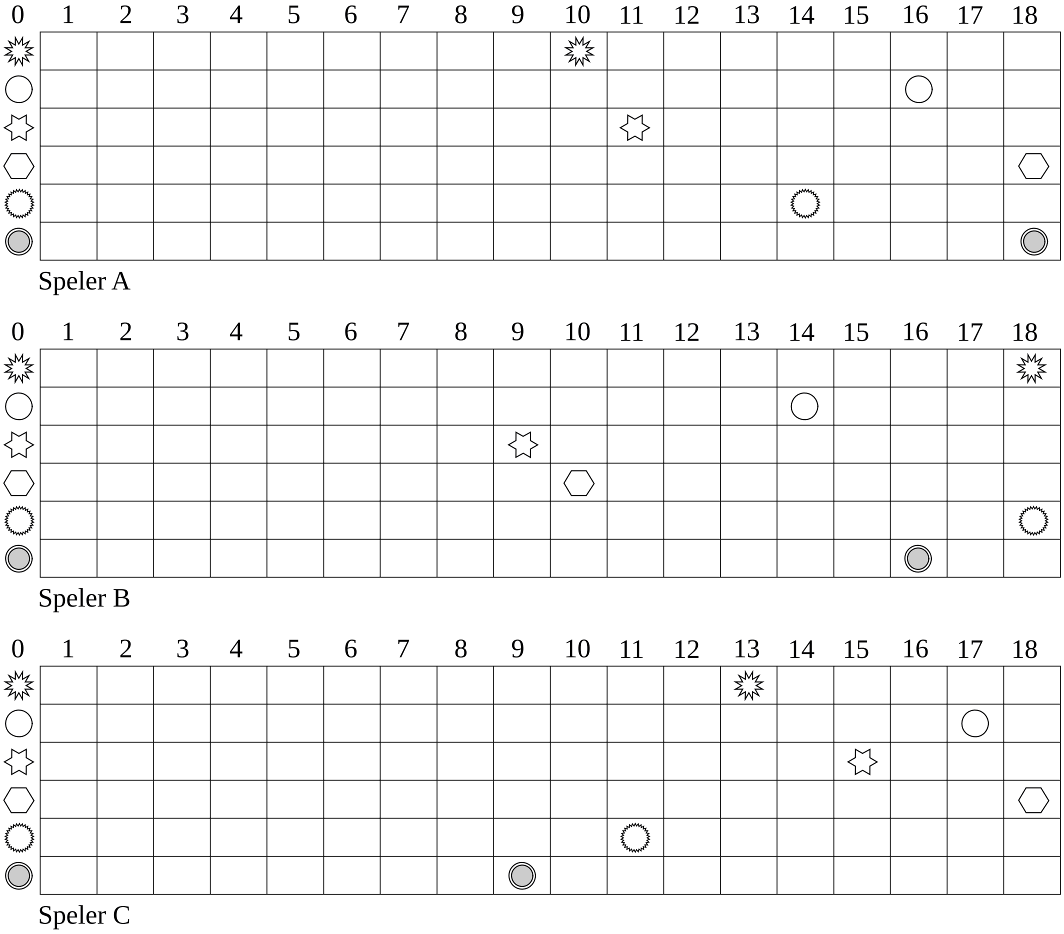


Elke mogelijke tegel met twee dezelfde symbolen komt 5 keer voor. Tegel A in figuur 1 komt dus 5 keer voor.
Elke mogelijke tegel met twee verschillende symbolen komt 6 keer voor. Dus bijvoorbeeld de tegel met een cirkel en een 12-puntige ster (tegel B in figuur 1) komt 6 keer voor.

5p **11** Bereken het totale aantal tegels dat bij Genius wordt gebruikt.

Elke speler heeft een scorekaart. Daarop wordt voor elk symbool de score, het behaalde aantal punten, bijgehouden. Hoe de punten worden behaald doet hier verder niet ter zake. In figuur 2 staan drie scorekaarten.
Bij Genius moet een speler proberen met alle symbolen zo veel mogelijk punten te halen. De **eindscore** is het aantal punten van het symbool waarmee de speler de **minste** punten heeft behaald. Winnaar is degene met de hoogste eindscore. Als twee spelers dezelfde eindscore hebben, wordt gekeken naar de op een na laagste score, enzovoort.

figuur 2



In figuur 2 heeft speler A een eindscore van 10 punten en de spelers B en C ieder 9 punten. Speler A wint dus van de spelers B en C. Speler C wint van speler B omdat de op een na laagste score bij speler C 11 punten is en bij speler B 10.
Op de scorekaarten is ook te zien dat voor elk symbool maximaal 18 punten behaald kunnen worden.
Het spel werd gespeeld door vier spelers. De scorekaart van speler D is niet afgebeeld. Wel weten we dat de gemiddelde score van speler D voor de zes symbolen in dit spel precies 16 punten is.

4p **12** Leg met een getallenvoorbeeld uit dat het mogelijk is dat speler D niet de winnaar is.

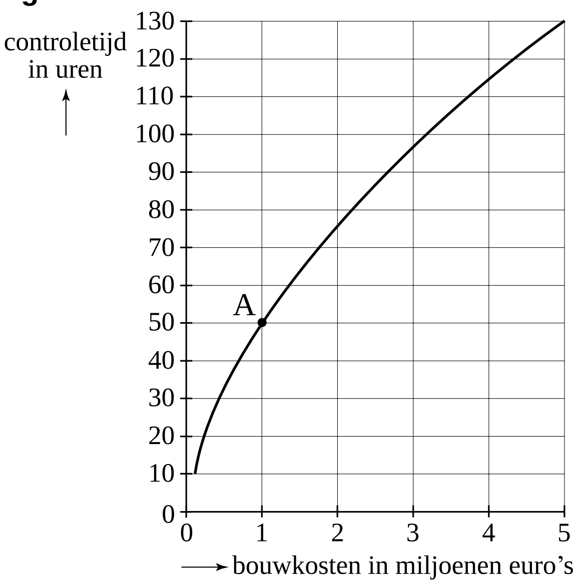
Edwin speelt Genius vaak met twee vrienden. Als iedereen even goed is in dit spel mag je verwachten dat de kans dat Edwin een spel Genius wint elke keer gelijk is aan $\frac{1}{3}$.
Edwin heeft zelf het idee dat hij zo goed is dat zijn winstkans bij elk spel groter is dan $\frac{1}{3}$.
Na 25 keer spelen met de twee vrienden heeft Edwin 12 keer gewonnen.

6p **13** Onderzoek of er geconcludeerd mag worden dat de kans dat Edwin wint van zijn twee vrienden groter is dan $\frac{1}{3}$. Neem als significantieniveau 5%.

Controle bij nieuwbouw

Bij de bouw van woningen en gebouwen controleert de overheid of de constructie veilig is. Deze controle kost tijd. Hoe duurder het gebouw, hoe meer controletijd men denkt nodig te hebben. Het verband tussen de benodigde controletijd en de bouwkosten is weergegeven in figuur 3.

figuur 3



Van een gebouw A zijn de bouwkosten 1 miljoen euro. In figuur 3 is af te lezen dat de controletijd van gebouw A 50 uren is.
Als een gebouw B 100% duurder is dan gebouw A, is de controletijd van gebouw B niet 100% groter dan die van gebouw A.

3p **14** Bereken hoeveel procent de controletijd van gebouw B groter is ten opzichte van de controletijd van gebouw A.

Volgens ingenieur Van Overveld kan de grafiek in figuur 3 goed worden benaderd door de volgende formule:

$$C = \left(1{,}544 + 0{,}245 \cdot \log K\right)^9$$

Hierin is C de benodigde controletijd in uren en K de geraamde bouwkosten in miljoenen euro's. Deze formule is gebaseerd op het prijspeil van het jaar 2003. We gaan ervan uit dat de formule ook geldig is voor gebouwen die meer dan 5 miljoen euro kosten.

In 2003 werd het ontwerp van het Nieuwe Rijksmuseum goedgekeurd. Volgens de formule zou de benodigde controletijd zo'n 950 uur bedragen.

3p **15** Bereken hoeveel miljoen euro de geraamde bouwkosten van het Nieuwe Rijksmuseum waren.

De formule kan ook gebruikt worden voor de jaren na 2003. Maar dan moet voor de bouwkosten wel het bedrag genomen worden dat dit gebouw in 2003 zou hebben gekost.
We willen de controletijd berekenen van een gebouw waarvan in 2007 de bouwkosten 62,7 miljoen euro bedragen. De bouwkosten zijn in de periode 2003-2007 jaarlijks met 4% gestegen.

5p **16** Bereken de controletijd van dit gebouw.

Kostbare gebouwen vergen meer controletijd dan minder kostbare gebouwen. Dat is te zien in de grafiek van figuur 3: die grafiek is stijgend. Het kan ook worden aangetoond met de afgeleide van $C = \left(1,544 + 0,245 \cdot \log K\right)^9$.

4p **17** Geef de formule voor de afgeleide $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}K}$ en verklaar daarmee dat de functie C stijgend is.

De grafiek en de formule geven de verwachte controletijd. De werkelijke controletijd bij gebouwen van 1 miljoen euro is normaal verdeeld met een gemiddelde van 50 uur. Het blijkt dat bij 25% van deze gebouwen de controletijd meer dan 60 uur bedraagt.

6p **18** Bereken bij hoeveel procent van deze gebouwen de controletijd minder dan 35 uur bedraagt.

Zes gooien

Bij sommige spelletjes moet een speler eerst met een dobbelsteen een zes gooien voordat hij verder mag spelen. Soms gooit zo'n speler al in de eerste worp een zes, maar soms gooit hij bijvoorbeeld pas in de 10e worp een zes.
In onderstaande tabel zie je een begin van een overzicht van de kansen om pas na een bepaald aantal worpen de eerste zes te gooien. Deze kansen zijn afgerond op vier decimalen.

tabel 1

Aantal worpen n	1	2	3	4	…
P(1e keer zes bij n-de worp)	0,1667	0,1389	0,1157	0,0965	…

In de tabel zie je bijvoorbeeld dat de kans om pas in de 4e worp de eerste zes te gooien afgerond 0,0965 is.

4p **19** Bereken de kans om pas in de 7e worp de eerste zes te gooien.

Er bestaat een recursief verband tussen de kansen om bij de n-de worp voor de eerste keer zes te gooien. In dat recursieve verband wordt P_n uitgedrukt in P_{n-1}.
Hierbij is P_n de kans om de eerste zes te gooien bij de n-de worp.

3p **20** Geef dat recursieve verband.

De verwachtingswaarde E van het aantal worpen dat nodig is om de eerste zes te gooien kan worden berekend met de formule:

$$E = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 + \ldots$$

Deze berekening gaat oneindig ver door. Je kunt de waarde van E benaderen door de berekening na een aantal termen te stoppen. De uitkomst die je krijgt door te stoppen na n termen, noemen we S_n.
Hiervoor geldt dus de formule:

$$S_n = 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + \ldots + n \cdot P_n$$

Berekend kan worden dat $S_{30} \approx 5{,}8483$.
S_{31} kun je berekenen met behulp van de waarde van S_{30}.

4p **21** Bereken S_{31}.