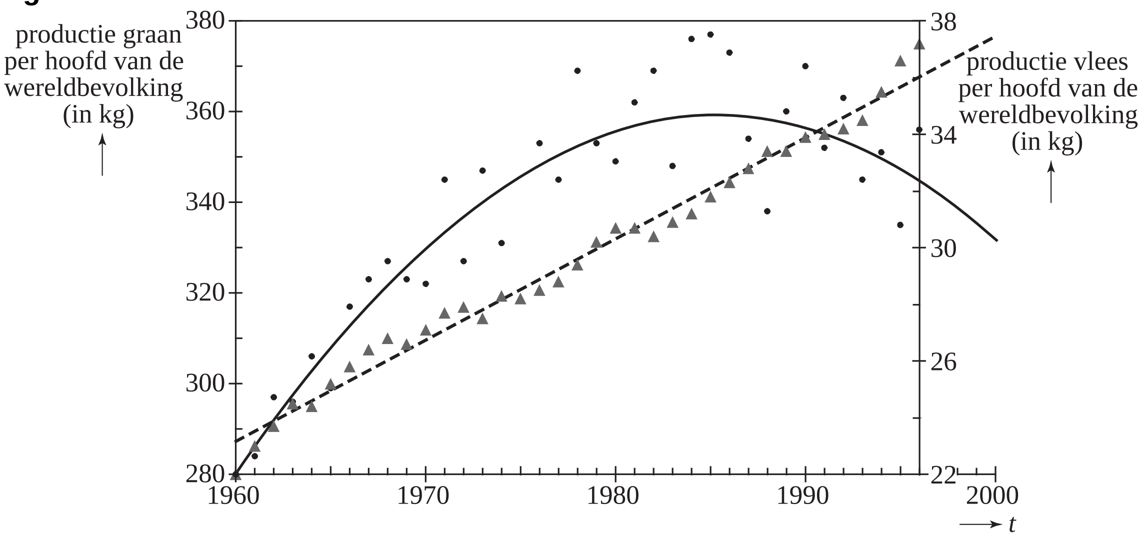
## Steeds meer vlees

In figuur 1 wordt voor de periode 1960 - 1996 zowel de graanproductie als de vleesproductie per hoofd van de wereldbevolking weergegeven. Hiervoor worden twee verticale assen gebruikt.
De ronde stippen in de grafiek geven de jaarlijkse graanproductie $G$ per hoofd van de wereldbevolking in kg aan. Het verloop ervan wordt benaderd door een parabool.
De driehoekjes geven de jaarlijkse vleesproductie $V$ per hoofd van de wereldbevolking in kg aan. Het verloop ervan wordt benaderd door een rechte lijn (stippellijn).

**figuur 1**




Volgens de benadering met de rechte lijn in figuur 1 was $V$ in 1960 gelijk aan 23,2 kg en in 1996 gelijk aan 36,0 kg. In 1960 werd in Nederland per hoofd van de bevolking 45,3 kg vlees geconsumeerd. Met de gegeven benadering van $V$ is te berekenen wanneer er voor de wereldbevolking per hoofd gemiddeld evenveel vlees geproduceerd zal worden als de Nederlanders in 1960 gebruikten.

5p **1** Bereken in welk jaar de wereldvleesproductie volgens de gegeven lineaire benadering 45,3 kg per hoofd van de wereldbevolking zal bedragen.

De parabool in figuur 1 kan worden beschreven met de formule $G = -0{,}125t^2 + 6{,}33t + 279$. Hierin is $G$ de wereldgraanproductie per jaar in kg per hoofd van de wereldbevolking en $t$ de tijd in jaren met $t$ = 0 in het jaar 1960.

Volgens de formule heeft $G$ een maximum. Zoals in figuur 1 is te zien, is dit maximum niet gelijk aan het werkelijke maximum van de jaarlijkse graanproductie per hoofd van de bevolking.

5p **2** Bereken met behulp van differentiëren de maximale waarde van $G$ volgens de formule en bepaal met behulp van figuur 1 het verschil tussen dit berekende maximum en de hoogste werkelijke jaarlijkse graanproductie per jaar per hoofd van de bevolking.

Voor de periode 1990 - 2050 gebruiken we nu een andere schatting van de voedselsituatie, die uitgaat van een iets andere formule voor de vleesproductie $V$ in kg per hoofd van de wereldbevolking. Deze formule wordt gegeven door: $V^* = 0,25t + 25$. De tijd $t$ in jaren wordt gerekend vanaf het jaar 1960.

Volgens deze formule neemt de vleesproductie steeds verder toe. Dat is alleen mogelijk als men op aarde meer graan gaat gebruiken om aan het vee te voeren, waardoor er minder graan beschikbaar is voor voeding van de mens. Om 1 kg vlees te kunnen produceren is ongeveer 4 kg graan nodig.

5p **3** Toon met de gegeven formules voor $G$ en $V^*$ aan dat er in het jaar 2000 per hoofd van de wereldbevolking ongeveer 192 kg graan over was voor voeding van de mens.

We gaan ervan uit dat er jaarlijks per hoofd van de wereldbevolking ongeveer 150 kg graan voor voeding van de mens nodig is.

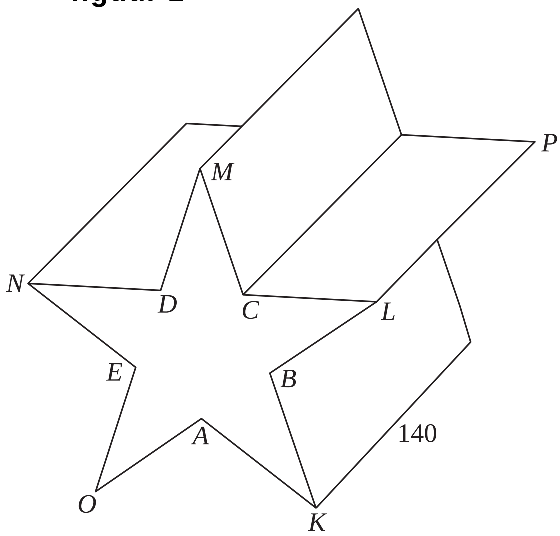
5p **4** Bereken met behulp van de bovenstaande formules voor $G$ en $V^*$ vanaf welk jaar er door de toenemende vleesproductie te weinig graan over zal zijn voor voeding van de mens.

## Sterbank

Op de foto zie je een bank waarvan de zijkanten een regelmatige vijfpuntige stervorm hebben. Deze zijkanten staan verticaal.
In deze opgave kijken we niet naar de latten maar naar de meetkundige figuur van de bank zoals die te zien is in figuur 1. Deze meetkundige figuur bestaat uit tien rechthoekige vlakdelen (onder andere de twee vlakken waarop men zit) en twee vlakdelen die de vorm hebben van een vijfpuntige ster. Alle zijden van deze ster zijn 31,0 cm lang.

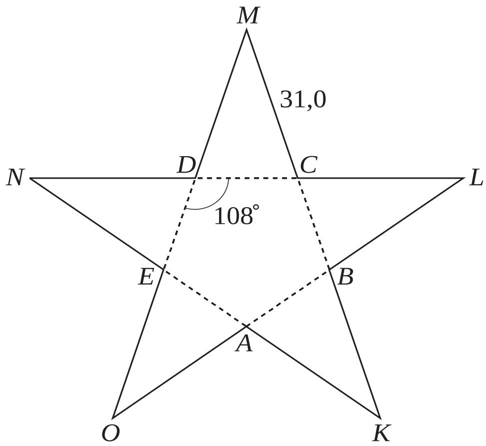
**foto**

**figuur 1**




De vijfpuntige ster bestaat uit een regelmatige vijfhoek $ABCDE$ en vijf gelijkbenige driehoeken. Zie figuur 2. De punten $M$, $C$, $B$ en $K$ liggen op één lijn. De hoeken van de vijfhoek (bijvoorbeeld de hoeken $DCB$ en $CDE$) zijn allemaal 108º.

**figuur 2**




3p **5** Bereken $\angle DMC$.

Uit de voorgaande gegevens volgt dat $DC$ ongeveer 19,16 cm is. De breedte van de bank, $PL$, is 140 cm. Zie figuur 1.

4p **6** Teken op schaal 1 : 20 het bovenaanzicht van de ondoorzichtige meetkundige figuur van deze bank (figuur 1) en geef daarin de hoekpunten $L, C, M, D, N$ en $P$ aan.

5p **7** Bereken de totale hoogte van de bank.

De bank op de foto is gemaakt van houten latten. Het is ook mogelijk een bank van dezelfde vorm en afmetingen te maken van massief beton. Om te weten hoeveel beton je nodig hebt, kun je de inhoud van de meetkundige figuur (zie figuur 1) berekenen. Daarbij kun je het gegeven gebruiken dat in de vijfpuntige ster de driehoeken $ADC$ en $MDC$ congruent (gelijkvormig en even groot) zijn.

6p **8** Bereken met behulp van de meetkundige figuur van de bank hoeveel beton er nodig is. Rond je antwoord af op gehele $dm^3$.

# Golvend dak

Op de foto zie je een zwembad met sporthal, samen onder één golvend dak. Het golvende dak bereikt boven het zwembad dezelfde hoogte als boven de sporthal. In figuur 1 is een schematisch vooraanzicht getekend. In dit vooraanzicht heeft de rand van het dak de vorm van een sinusoïde met als formule

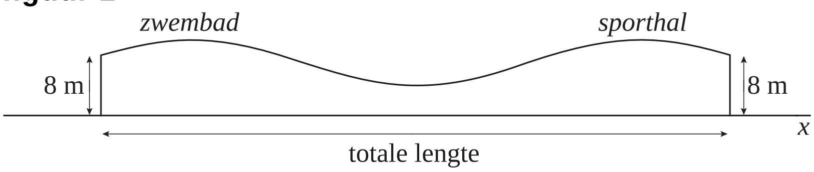
$$h = 3\sin\left(\frac{\pi}{30}x\right) + 7$$

**foto**

De hoogte $h$ en de lengte $x$ zijn allebei in meter. De lengte $x$ wordt van links naar rechts over de grond gemeten langs de voorkant van het gebouw, vanaf een punt $O$ dat links van de linkerkant van de voorgevel van het gebouw ligt.

Aan beide uiteinden van het gebouw is het dak 8 meter hoog. Zie figuur 1.

**figuur 1**

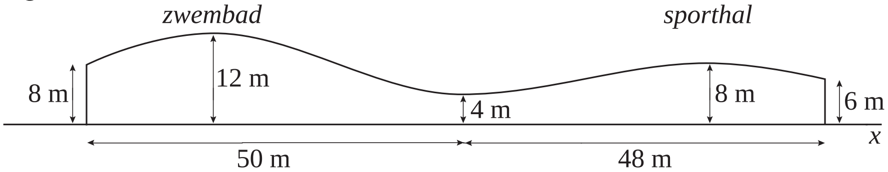



3p **9** Bereken exact de minimale en de maximale hoogte van het dak.

4p **10** Bereken de totale lengte van het gebouw in gehele meters nauwkeurig.

Voordat het zwembad met sporthal werd gebouwd, heeft een architect een ontwerp gemaakt van het gebouw. In het eerste ontwerp dat de architect had gemaakt, was het dak boven het zwembad hoger dan het dak boven de sporthal. Ook de lengte van de voorkant van het gebouw in dit eerste ontwerp was anders dan die van het uiteindelijke gebouw. In figuur 2 staan de afmetingen van het gebouw volgens het eerste ontwerp.

**figuur 2**




Het gedeelte van het dak dat boven het zwembad ligt, heeft in het vooraanzicht de vorm van een sinusoïde. Dit geldt ook voor het gedeelte van het dak boven de sporthal.

De twee sinusoïdes gaan vloeiend in elkaar over op de grens tussen zwembad en sporthal op een hoogte van 4 meter. Op die grens is de hoogte van het dak minimaal. Boven de sporthal heeft het dak een maximale hoogte van 8 meter. Zie figuur 2.

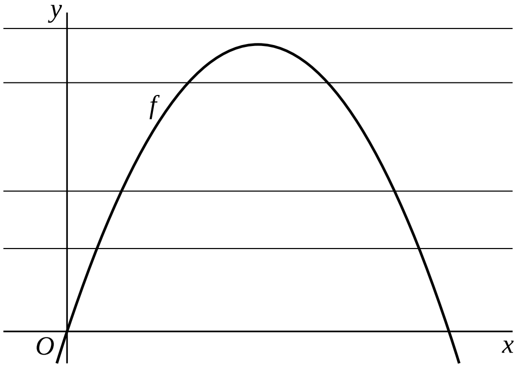
Met behulp van deze gegevens kun je een formule opstellen die hoort bij het vooraanzicht van het gedeelte van het dak boven de sporthal volgens het eerste ontwerp.

5p **11** Stel deze formule op. Je mag zelf de oorsprong kiezen. Licht je werkwijze toe.

## Horizontale lijnen

In figuur 1 zie je de grafiek van de functie $f$ die gegeven is door $f(x) = 6x - x^2$ en enkele horizontale lijnen. Deze lijnen horen bij de familie van lijnen $y = p$ met $p \geq 0$.

**figuur 1**

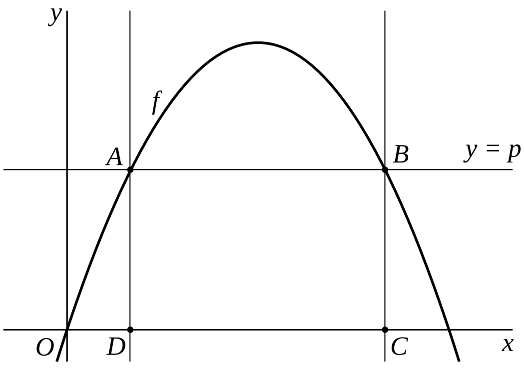



Een van de horizontale lijnen $y = p$ heeft slechts één punt gemeenschappelijk met de grafiek van $f$.

5p **12** Bereken op algebraïsche wijze de bijbehorende waarde van $p$.

In figuur 2 zie je dat de grafiek van $f$ door een horizontale lijn $y = p$ gesneden wordt in de punten $A$ en $B$. Door de punten $A$ en $B$ zie je ook twee verticale lijnen die de $x$-as snijden in $D$ en $C$.

**figuur 2**




De $x$-coördinaat van $D$ noemen we $a$, met $0 < a < 3$. De $x$-coördinaat van $C$ is dan $6 - a$.
Voor de oppervlakte $S$ van rechthoek $DCBA$ geldt dan de formule
$S = (6 - 2a)(6a - a^2)$.

3p **13** Leid deze formule af.

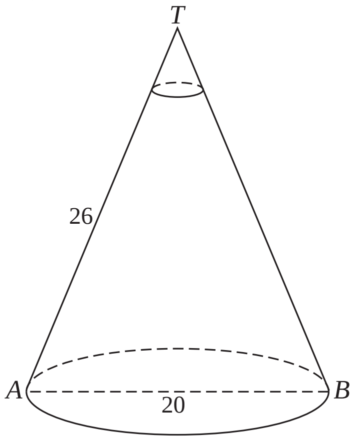
Er is één horizontale lijn $y = p$ waarbij de oppervlakte van rechthoek $DCBA$ maximaal is.

6p **14** Bereken exact de waarde van $a$ in deze situatie.

## Kegel

Van een kegel met top $T$ is de diameter van de grondcirkel ($AB$) 20 cm. Zie figuur 1. De afstand van punt $T$ langs de kegelmantel tot de grondcirkel ($TA$) is 26 cm.

**figuur 1**




De kegel van figuur 1 wordt doorsneden met een vlak evenwijdig aan het grondvlak op hoogte 20 cm. In de figuur is de snijcirkel onder punt $T$ aangegeven.
Het gedeelte van de kegel boven het snijvlak is een kleinere kegel met dezelfde top $T$ .

4p **15** Bereken de exacte verhouding van de inhouden van de oorspronkelijke kegel en de kleinere kegel.

Voor de oppervlakte $O$ van een kegelmantel geldt de formule: $O = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ .
Hierin is $r$ de straal van de grondcirkel en is $h$ de hoogte van de kegel.
Er worden kegels bekeken met hoogten die variëren tussen 10 en 20 cm en met een vaste oppervlakte van de kegelmantel van 300 cm$^2$.

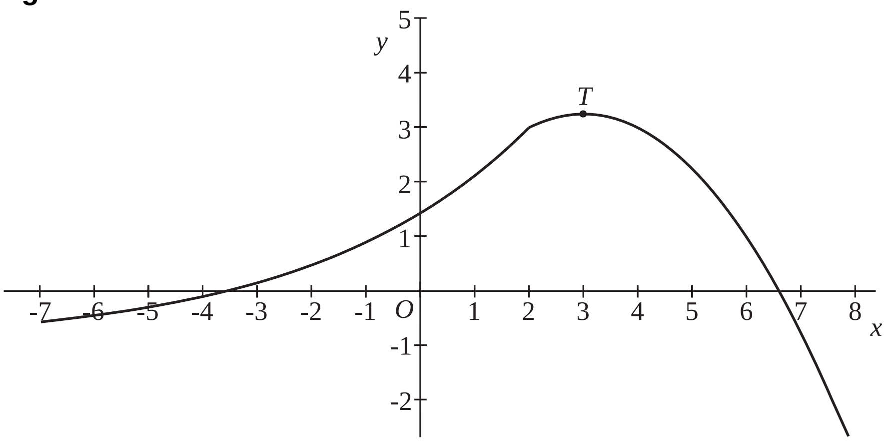
5p **16** Bereken welke waarden de diameters van de grondcirkels van deze kegels kunnen aannemen.

## Combi-functie

De functie $f$ heeft een voorschrift dat een combinatie is van twee functievoorschriften:

$$f(x) = \begin{cases} -1 + 4e^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x} & \text{als} \quad x \leq 2 \\ 1 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}x^2 & \text{als} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

**figuur 1**




De grafiek van $f$ bestaat dus ook uit twee delen. Deze twee delen sluiten in het punt (2, 3) weliswaar precies op elkaar aan, maar de hellingen van de twee grafiekdelen in dit punt zijn verschillend. Zie figuur 1.

5p **17** Bereken met behulp van differentiëren hoe groot die hellingen zijn.

De grafiek uit figuur 1 wordt eerst evenwijdig aan de $x$-as en vervolgens evenwijdig aan de $y$-as zo verschoven dat de top $T$ van de grafiek in de oorsprong (0, 0) komt te liggen. Bij de nieuwe grafiek die daardoor ontstaat, hoort een andere combinatie van twee functievoorschriften.

5p **18** Geef een functievoorschrift dat hoort bij het linkerdeel van de nieuwe grafiek. Licht je werkwijze toe.