Jus d'orange

Een restaurant van een warenhuis bestelt een grote partij perssinaasappels voor de bereiding van verse jus d'orange.
De sinaasappels worden aangevoerd in volle dozen van 50 stuks.

foto

De ervaring leert dat ongeveer één van de honderd sinaasappels beschimmeld is. Ga er bij de vragen 1, 2 en 3 vanuit dat de kans op een beschimmelde sinaasappel 0,01 is.

Voor een groot glas jus d'orange zijn drie sinaasappels nodig.
Een medewerker pakt aselect drie sinaasappels.

4p **1** □ Bereken de kans dat er precies één beschimmelde sinaasappel bij zit. Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

De kans op een doos sinaasappels zonder schimmel is ongeveer gelijk aan 0,605.

3p **2** □ Laat met behulp van een berekening zien dat dit zo is.

Bij een kwaliteitscontrole worden vijf volle dozen sinaasappels gecontroleerd.
Een doos is 'in orde' als er geen enkele beschimmelde sinaasappel in zit.
Als vier of vijf van de dozen niet in orde zijn, wordt de partij afgekeurd.

5p **3** □ Bereken de kans dat de partij wordt afgekeurd. Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

Een sinaasappel levert na het persen gemiddeld 8 cl sap op. De hoeveelheid sap per sinaasappel is normaal verdeeld met een standaardafwijking van 1,5 cl.

4p **4** □ Bereken hoeveel procent van de sinaasappels in een volle doos een hoeveelheid sap geeft die minder dan 1 cl van het gemiddelde afwijkt. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Weerstand

Een wielrenner moet op de vlakke weg twee soorten weerstand overwinnen om vooruit te komen: de luchtweerstand en de rolweerstand.
De rolweerstand hangt voornamelijk af van het soort wegdek, maar verder ook van het gewicht van de renner en van het type band dat gebruikt wordt: een brede noppenband geeft meer weerstand dan een smalle raceband.
Een maat voor de inspanning om deze weerstanden te overwinnen is het vermogen. Vermogen is de hoeveelheid arbeid die per seconde wordt verricht. De eenheid van vermogen is watt.
Voor een wielrenner van 75 kg die op een fiets met trainingsbanden rijdt, gelden bij windstil weer bij benadering de volgende formules:

$$P_{\text{rol}} = 0{,}75v \quad \text{en} \quad P_{\text{lucht}} = 0{,}004v^3$$

P_{rol} is het vermogen nodig om de rolweerstand te overwinnen, uitgedrukt in watt.
v is de snelheid van de wielrenner, uitgedrukt in kilometer per uur.
P_{lucht} is het vermogen nodig om de luchtweerstand te overwinnen, uitgedrukt in watt.

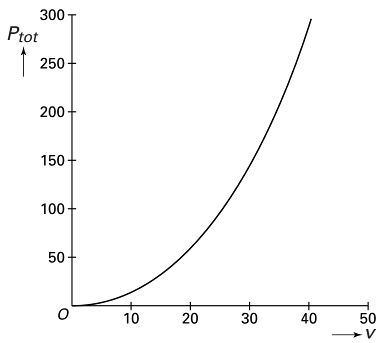
4p **5** □ Bereken bij welke snelheden de luchtweerstand groter is dan de rolweerstand. Geef je antwoord in kilometer per uur, afgerond op één decimaal.

P_{tot} is het totale vermogen (in watt) dat door de wielrenner moet worden geleverd om met snelheid v vooruit te komen:

$$P_{\text{tot}} = P_{\text{rol}} + P_{\text{lucht}}$$

In figuur 1 is de grafiek getekend van het verband tussen het geleverde vermogen P_{tot} van de renner en zijn snelheid v.

figuur 1



Voor het handhaven van een snelheid van 26 km per uur moet de renner meer vermogen leveren dan voor het handhaven van een snelheid van 25 km per uur.

3p **6** □ Bereken hoeveel meer vermogen hij moet leveren.

4p **7** □ Bereken, met behulp van differentiëren, voor welke waarde van v geldt $\frac{\mathrm{d}P_{\text{tot}}}{\mathrm{d}v} = 10$.
Geef je antwoord in km per uur, afgerond op een geheel getal.

De wielrenner stapt over op een ligfiets, omdat hij gehoord heeft dat:
- het vermogen dat nodig is om de luchtweerstand te overwinnen 25 procent minder is, zodat P_{lucht} gelijk is aan $0{,}003v^3$;
- de rolweerstand van een ligfiets dezelfde is als van een racefiets;
- je op een ligfiets door de speciale houding anderhalf keer zoveel vermogen levert bij dezelfde inspanning als op een racefiets.

Neem aan dat deze drie effecten inderdaad optreden.

De wielrenner rijdt tijdens trainingen op zijn racefiets 30 kilometer per uur.

6p **8** □ Toon aan dat de wielrenner in dat geval op de ligfiets met dezelfde inspanning als op zijn racefiets ruim 38 kilometer per uur fietst.

Cosinus

Gegeven zijn de functies $f_1(x) = 3 \cdot \cos(x)$ en $f_2(x) = 2 \cdot \cos(x + \frac{\pi}{3})$

4p **9** □ Onderzoek, met behulp van de grafische rekenmachine, voor welke waarden van x tussen 0 en 2π geldt $f_1(x) < f_2(x)$. Rond de getallen in het antwoord af op twee decimalen.

Hieronder zijn enkele transformaties vermeld:

– horizontale verschuiving … naar links of … naar rechts;
– verticale verschuiving … omhoog of … omlaag;
– vermenigvuldiging ten opzichte van de y-as met de factor … ;
– vermenigvuldiging ten opzichte van de x-as met de factor … .

(In plaats van vermenigvuldiging spreekt men ook wel van horizontale of verticale uitrekking of inkrimping.)

4p **10** □ Welke van deze transformaties kunnen achtereenvolgens worden uitgevoerd om uit de standaardgrafiek van $y = \cos(x)$ de grafiek van f_2 te krijgen? Geef daarbij ook de getallen die op de plaats van de puntjes horen te staan. (Er zijn verschillende goede antwoorden mogelijk: geef niet meer dan één antwoord.)

Voor de somfunctie s geldt

$$s(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

De somfunctie s kan geschreven worden in de vorm $s(x) = a \cdot \cos(x + b)$.

5p **11** □ Leid, met behulp van de grafische rekenmachine, uit de grafiek van s de waarden van a en b af. Geef je antwoorden in twee decimalen nauwkeurig.

Lootjes trekken

Ans, Bert, Cor en Dorien willen samen een surprise-avond organiseren.
Het is de bedoeling dat elk van hen een surprise maakt voor één van de andere drie.
Om te beslissen wie een surprise voor wie zal maken, schrijft ieder zijn naam op een papiertje. Alle papiertjes worden verzameld en vervolgens, zonder op de namen te letten, weer uitgedeeld. Dit heet *lootjes trekken*.
Krijgt iemand zijn eigen naam, dan wordt het lootjes trekken voor iedereen herhaald.

Het gaat erom dat er een situatie ontstaat waarbij niemand zijn eigen naam heeft.
Ze vragen zich af of dit snel zal lukken en gaan daarom het lootjes trekken uitproberen.
Als Ans, Bert, Cor en Dorien de naam hebben getrokken van respectievelijk Bert, Ans, Cor en Dorien, geven ze dit aan met BACD. Op die manier gaan ze vaststellen hoeveel verdelingen er mogelijk zijn.

4p **12** □ Laat zien bij welke zes van die verdelingen precies twee van hen hun eigen naam trekken.

In tabel 1 is een gedeelte van de kansverdeling voor deze groep van vier personen gegeven.

tabel 1

aantal personen die hun eigen naam trekken	0	1	2	3	4
kans		$\frac{8}{24}$			$\frac{1}{24}$

5p **13** □ Bereken, met behulp van tabel 1, de kans dat deze vier personen het lootjes trekken opnieuw moeten doen.

De kans dat niemand zijn eigen naam trekt, hangt af van het aantal personen in de groep.
Wiskundigen hebben voor verschillende groepsgrootten de regelmaat aangetoond, zoals is weergegeven in tabel 2.

tabel 2

aantal personen in de groep	kans dat *niemand* zijn eigen naam trekt
2	$\frac{1}{2!}$
3	$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$
4	$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}$
5	$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$
6	$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$
enzovoort	

3p **14** □ Bereken met behulp van tabel 2 de kans dat bij lootjes trekken in een groep van zeven personen *niemand* zijn eigen naam trekt. Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

Iemand beweert dat de kans dat er opnieuw lootjes getrokken moeten worden, bij 13 personen groter is dan bij 12 personen.

4p **15** □ Onderzoek of dit waar is.

Een klas van 30 leerlingen gaat lootjes trekken voor een surprise-avond. Ga er vanuit dat de kans dat niemand zijn eigen naam trekt, precies gelijk is aan 0,368.

4p **16** □ Bereken hoe groot de kans is dat in deze klas het lootjes trekken pas bij de vijfde poging lukt (dus dat niemand zijn eigen naam trekt). Geef je antwoord in drie decimalen nauwkeurig.

Lawaaitrauma

Als je langdurig harde geluiden hoort, kunnen klachten ontstaan, zoals stress of gehoorbeschadiging. Men spreekt dan van een lawaaitrauma.

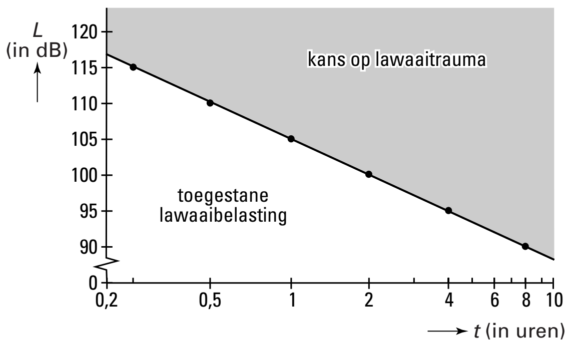
In Noorwegen bleek het aantal militairen met een lawaaitrauma tussen 1 januari 1982 en 1 januari 1988 te zijn verdubbeld.
Op 1 januari 1982 hadden 4500 van hen een aantoonbaar lawaaitrauma.
Neem aan dat het aantal militairen met zo'n trauma in de periode 1982–1988 exponentieel toenam.

5p **17** □ Bereken het aantal militairen dat op 1 januari 1985 een lawaaitrauma had. Rond je antwoord af op honderdtallen.

In de Verenigde Staten heeft men rond 1990 vastgesteld dat geluidssterktes van meer dan 90 dB (decibel) waaraan iemand langer dan 8 uur per dag (een werkdag) wordt blootgesteld, een lawaaitrauma kunnen opleveren.
Ter bescherming van de werknemers is daarom de volgende norm ingevoerd:
- bij een voortdurende geluidssterkte van 90 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
- bij elke toename van de geluidssterkte met 5 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

In het assenstelsel van figuur 2 is een lijn getekend. Deze lijn geeft het verband weer tussen de geluidssterkte en de maximaal toegestane werktijd, zoals die gebruikt wordt voor industrielawaai in de VS.
L is de geluidssterkte in dB en t is de maximaal toegestane werktijd in uren.

figuur 2



De Europese norm is sinds enkele jaren strenger dan de norm van de VS:
- bij een voortdurende geluidssterkte van 80 dB bedraagt de maximale werktijd 8 uur;
- bij elke toename van de geluidssterkte met 3 dB moet de maximale werktijd gehalveerd worden.

Op de bijlage bij vraag 18 is de lijn van figuur 2, behorend bij de norm van de VS, nogmaals in een assenstelsel getekend.

3p **18** □ Teken in dit assenstelsel de lijn die bij de Europese norm hoort.

De formule die hoort bij de in figuur 2 getekende lijn is $L = -16{,}6 \cdot \log(t) + 105$.

In Amerika en Europa staan twee fabrieken met voor de werknemers precies dezelfde geluidssterkte. In de Amerikaanse fabriek mag men vanwege de geluidssterkte maximaal 6 uur per dag werken.

5p **19** □ Onderzoek hoeveel tijd per dag men in de Europese fabriek maximaal zou mogen werken.

Bijlage bij de vraag 18

Wiskunde B1 (nieuwe stijl)

Examen HAVO 2001

Tijdvak 1
Woensdag 30 mei
13.30–16.30 uur

Examennummer

....

Naam

....

Vraag 18