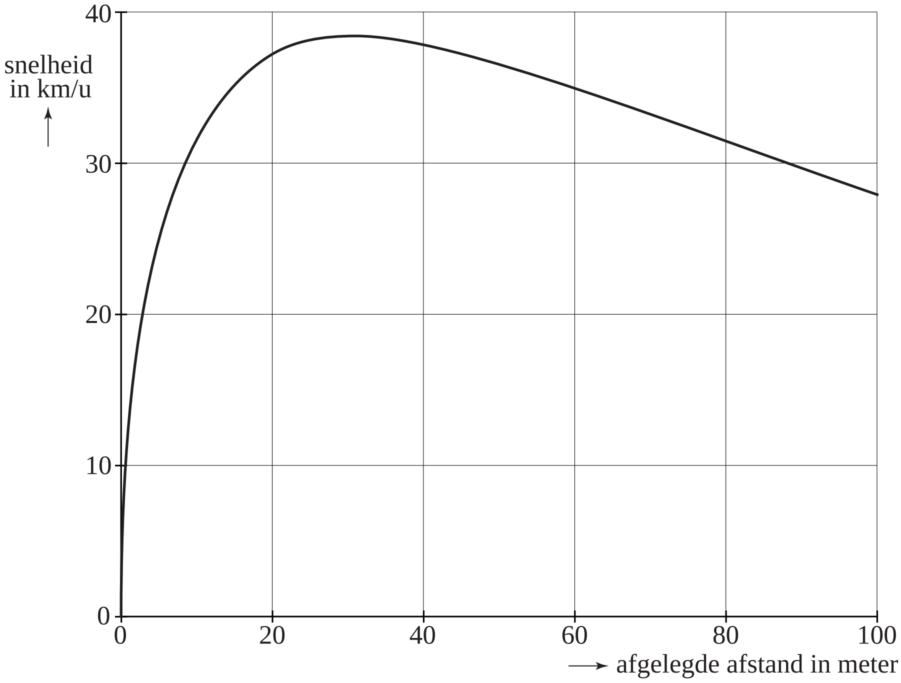
Sprintsnelheid

Een hardloopster is gespecialiseerd op de 100 meter. Bij dit atletiekonderdeel moet je zo snel mogelijk je topsnelheid halen en die dan proberen vast te houden tot de finish.

Haar trainer heeft haar sprint laten onderzoeken met behulp van supersnelle camera's.
In figuur 1 is het verband tussen de snelheid en de afgelegde afstand in een grafiek weergegeven. Je vindt figuur 1 ook op de uitwerkbijlage.

figuur 1



4p **1** Teken in figuur 2 op de uitwerkbijlage het toenamediagram dat past bij de grafiek van figuur 1. Neem als stapgrootte 20 meter.

Op verzoek van de trainer heeft een wiskundige een formule gemaakt die goed past bij de grafiek in figuur 1. Die formule is:

$$v = \frac{100\,800 \cdot \sqrt{x}}{(x+90)^2}$$

In deze formule is v de snelheid in kilometer per uur en x de afgelegde afstand in meter.

In figuur 1 zie je dat de maximale snelheid ongeveer 38 km per uur is en de snelheid bij de finish ongeveer 28 km per uur.

2p **2** Bereken met welke snelheid de hardloopster volgens de formule de finish passeert. Geef je antwoord in één decimaal.

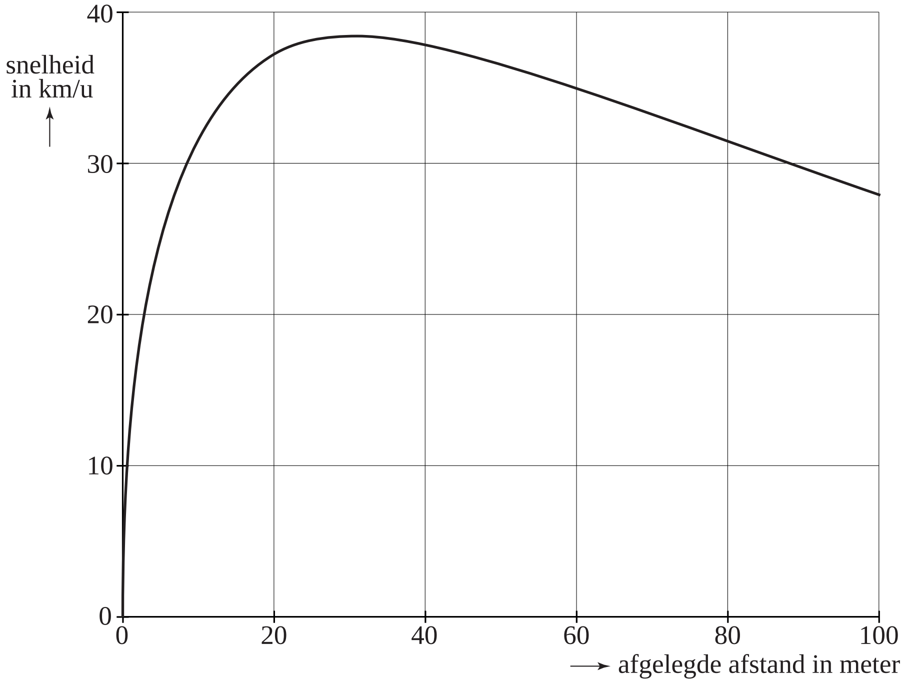
3p **3** Bereken de hoogste snelheid die de hardloopster bereikt volgens de formule. Geef je antwoord in één decimaal.

In de grafiek zie je dat de snelheid tijdens een gedeelte van de sprint hoger dan 35 km per uur is.

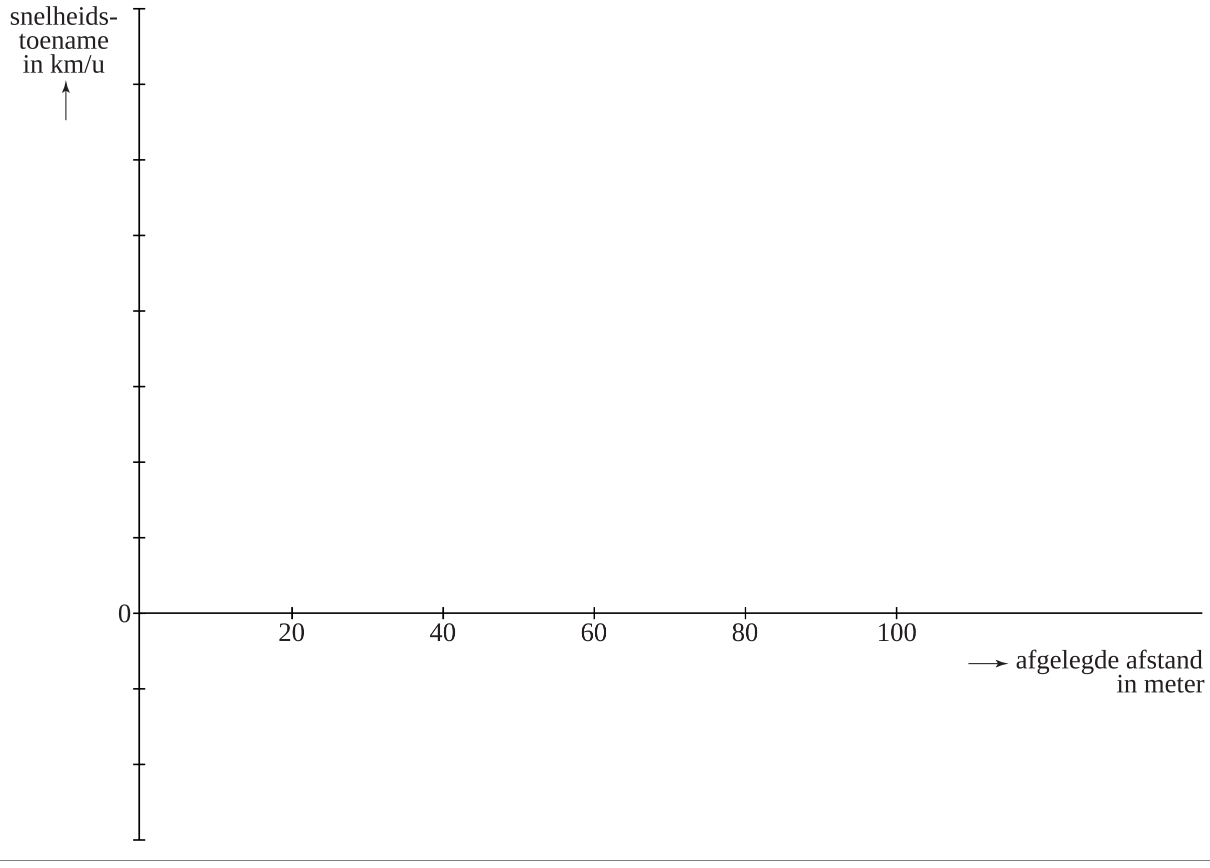
5p **4** Bereken met behulp van de formule hoeveel meter de hardloopster aflegt met een snelheid die hoger is dan 35 km per uur.

uitwerkbijlage

1 **figuur 1**



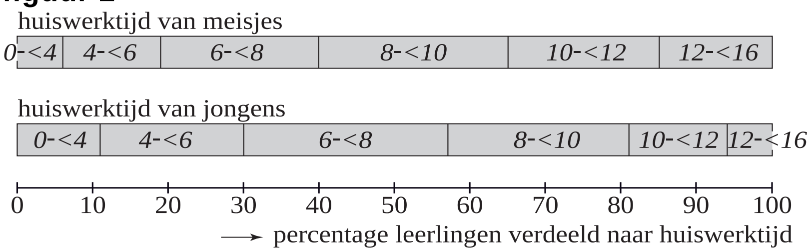
figuur 2



Huiswerk

Uit onderzoek is gebleken dat leerlingen in de eerste klas van het voortgezet onderwijs gemiddeld ruim 8 uur per week aan huiswerk besteden. De meeste tijd besteden zij aan de vakken wiskunde, Engels en Nederlands.
Daarnaast besteden meisjes meer tijd aan huiswerk dan jongens.
De tijd in uren die leerlingen per week aan hun huiswerk besteden, noemen we de **huiswerktijd**.
In figuur 2 zijn de resultaten van het onderzoek weergegeven.

figuur 2



In figuur 2 kun je bijvoorbeeld zien dat ongeveer 27 procent van de jongens minstens 6 uur maar minder dan 8 uur per week aan huiswerk besteedt.

3p **5** Hoeveel procent van de meisjes besteedt 8 uur of meer per week aan het huiswerk? Licht je antwoord toe.

De gemiddelde huiswerktijd van de leerlingen in de eerste klas is ruim 8 uur. Meisjes blijken gemiddeld meer dan 8 uur aan hun huiswerk te besteden. Met behulp van de klassenmiddens kun je het gemiddelde voor de jongens schatten.

4p **6** Toon met behulp van een berekening met de klassenmiddens aan dat de gemiddelde huiswerktijd van de jongens minder dan 8 uur is.

Docenten vinden dat leerlingen ongeveer 9 uur per week aan hun huiswerk zouden moeten besteden.
Ga ervan uit dat de huiswerktijd van de meisjes bij benadering normaal verdeeld is met een gemiddelde van 8,8 uur en een standaardafwijking van 3,2 uur.

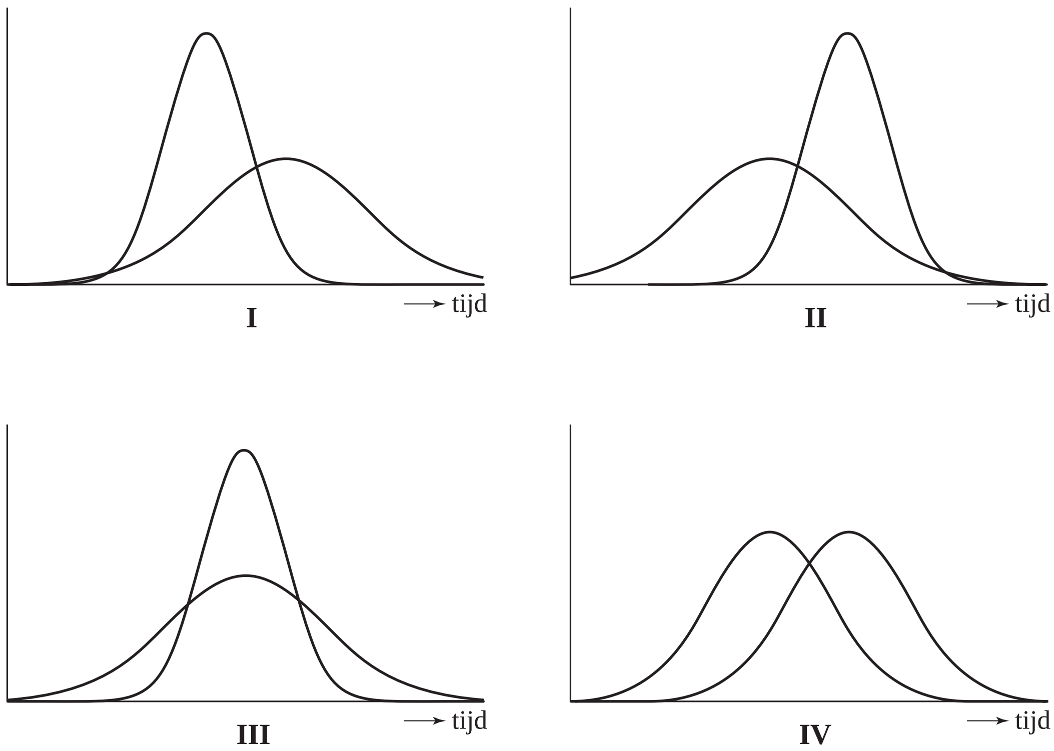
3p **7** Bereken met deze gegevens hoeveel procent van de meisjes minstens 9 uur per week aan huiswerk besteedt.

De huiswerktijd van de jongens is bij benadering ook normaal verdeeld. Het gemiddelde is 7,5 uur. Verder zien we in figuur 2 dat 30 procent van hen minder dan 6 uur per week aan huiswerk besteedt.

4p **8** Bereken met behulp van deze normale verdeling de standaardafwijking van de huiswerktijd van de jongens.

Men heeft een soortgelijk onderzoek gedaan onder studenten. Daarbij is gekeken naar de tijd die mannelijke en vrouwelijke studenten thuis aan hun studie besteden. Het onderzoek wijst uit dat vrouwen per week meer tijd aan ‘huiswerk’ besteden dan mannen. De spreiding in huiswerktijd bij de mannen is kleiner dan bij de vrouwen. Bij beide is hier bij benadering ook weer sprake van een normale verdeling.
Vier leerlingen kregen de opdracht om in één figuur van zowel de mannelijke als de vrouwelijke studenten een verdeling van de tijd aan te geven die de studenten thuis aan hun studie besteden. Het resultaat van deze opdracht staat in figuur 3.

figuur 3



Eén van de bovenstaande figuren past het best bij de gegevens over de studenten.

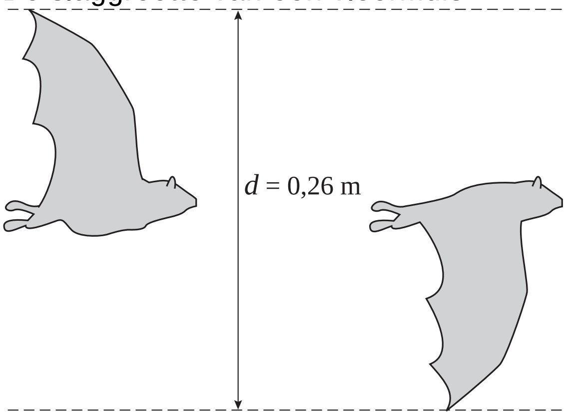
4p **9** Welke figuur is dat? Licht je antwoord toe.

Vliegen en zwemmen

Uit biologisch onderzoek blijkt dat vogels, vleermuizen en insecten op een vergelijkbare manier met hun vleugels bewegen als vissen met hun staartvin. Onderzoekers hebben een verband ontdekt tussen de **slagfrequentie** (het aantal slagen per seconde van de vleugels of staartvin), de **slaggrootte** (de afstand tussen de uiterste staartvin- of vleugelstanden tijdens een slag, zie figuur 4) en de **kruissnelheid** (de gemiddelde snelheid).

figuur 4

De slaggrootte van een vleermuis



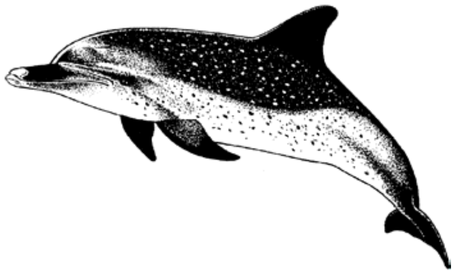
Voor dieren als vissen, dolfijnen, vogels en insecten is het verband hetzelfde. Er geldt namelijk:

$$\frac{f \cdot d}{v} = 0,3$$

Dit wordt wel de formule van Strouhal genoemd.
In deze formule is:
- f de slagfrequentie (het aantal slagen per seconde van de vleugels of staartvin);
- d de slaggrootte (in meter);
- v de kruissnelheid (in meter per seconde).

De kolibrie is een klein vogeltje dat vliegt met een hoge slagfrequentie.
Een kolibrie heeft een slaggrootte van 8 cm en een kruissnelheid van 13,5 meter per seconde.

3p **10** Toon aan dat een kolibrie een slagfrequentie van ruim 50 heeft.



De tuimelaar (een dolfijnensoort) heeft een kruissnelheid van 15 meter per seconde. Voor de tuimelaar kan f worden uitgedrukt in d:

$$f = \frac{4,5}{d}$$

3p **11** Laat zien hoe deze formule ontstaat uit de formule van Strouhal.

De formule van f is ook te schrijven als:

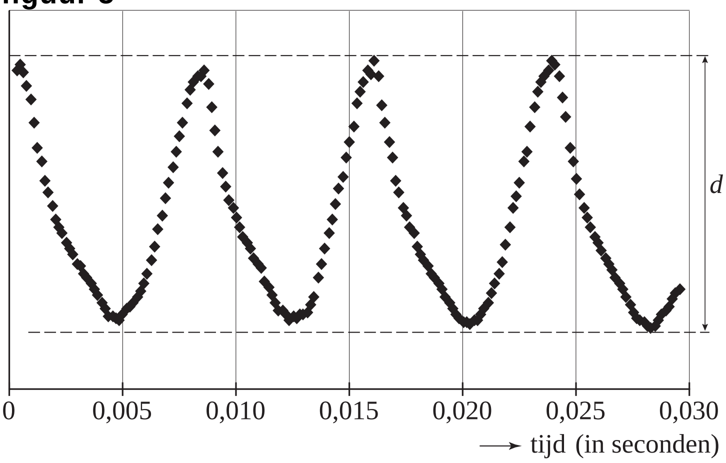
$$f = 4,5 \cdot d^{-1}$$

Tijdens de groei van de tuimelaar groeit ook zijn staartvin. Daardoor wordt zijn slaggrootte groter en bereikt hij met een kleiner aantal slagen per seconde de kruissnelheid van 15 meter per seconde.

4p **12** Toon dit met behulp van de afgeleide aan.

De gewone huisvlieg is ook onderzocht. De slaggrootte van de huisvlieg is kleiner dan die van de vleermuis (zie figuur 4). De punten in figuur 5 geven de hoogte aan van het uiteinde van de vleugels van de vlieg tijdens de vlucht. In figuur 5 is ruim $3\frac{1}{2}$ slag te zien. Als je weet hoe lang één slag duurt, kun je natuurlijk uitrekenen hoeveel slagen er in één seconde passen en heb je precies de slagfrequentie gevonden.

figuur 5



Verder is gegeven dat de slaggrootte van een huisvlieg 6,5 mm is.

5p **13** Bereken de kruissnelheid van de huisvlieg. Licht je antwoord toe.

Tientjes

'Tientjes' is een gokspel voor twee personen. Eén persoon is de speler, de ander is de bank.
Er zijn vijf kaarten die aan één zijde met een getal bedrukt zijn: drie met het getal -10 en twee met het getal $+10$.
Bij het begin van het spel schudt de bank deze kaarten en legt ze van links naar rechts naast elkaar op tafel met de getallen naar beneden.

De drie kaarten met het getal -10 en de twee kaarten met het getal $+10$ kunnen in verschillende volgordes liggen.

3p **14** Bereken dit aantal verschillende volgordes.

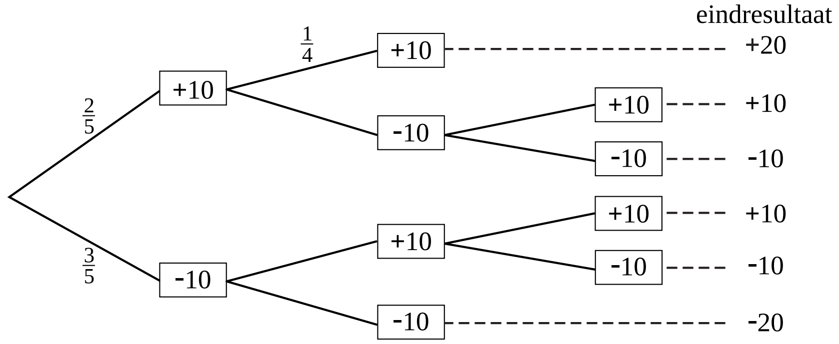
Het spel gaat als volgt:
De speler kiest één kaart en draait die om.
Voor de afrekening worden de volgende spelregels gebruikt:
- als er -10 op de kaart staat, moet de speler 10 euro betalen aan de bank;
- als er $+10$ op de kaart staat, ontvangt hij 10 euro van de bank.

De gekozen kaart wordt weggelegd. De speler besluit of hij stopt of doorgaat. Als hij doorgaat, kiest hij weer een kaart en draait die om. Daarna volgt een afrekening volgens dezelfde regels als bij de eerste kaart en wordt de gedraaide kaart weggelegd.
Iedere keer als de speler een kaart heeft omgedraaid en er is afgerekend, kan hij stoppen of een volgende kaart omdraaien. Er kunnen natuurlijk hoogstens vijf kaarten omgedraaid worden.

Speler Renske heeft de volgende strategie:
- Ze stopt met omdraaien als ze in het spel voor de tweede keer een kaart met -10 heeft omgedraaid. Dan weet ze namelijk zeker dat ze niet meer met winst kan eindigen.
- Ze stopt ook als ze voor de tweede keer een kaart met $+10$ heeft omgedraaid. Daarna kan haar winst immers alleen maar kleiner worden.

Zij heeft alle mogelijkheden van haar strategie op een kladblaadje voor zich liggen. Op dat blaadje heeft ze bij elk mogelijk spelverloop opgeschreven wat het eindresultaat is als ze stopt. Zo betekent eindresultaat $+10$ een winst van 10 euro en eindresultaat -20 houdt in dat Renske 20 euro heeft verloren. Zie figuur 6. In deze figuur zijn ook enkele kansen gegeven. Figuur 6 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 6



In tabel 1 staat een onvolledige kansverdeling van de eindresultaten.

tabel 1

Eindresultaat	–20	–10	+10	+20
Kans	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$		$\frac{1}{10}$

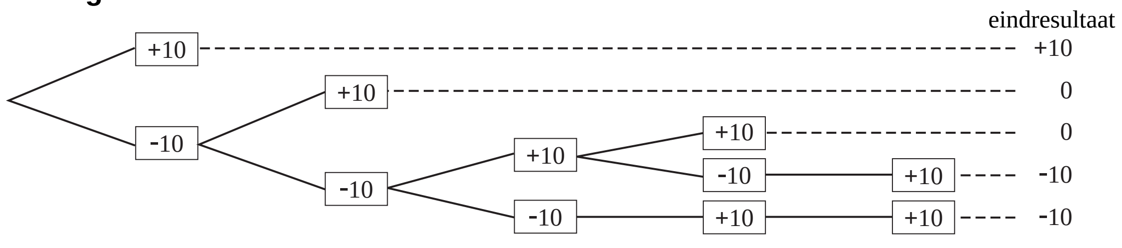
In deze tabel staat dat de kans op eindresultaat –10 gelijk is aan $\frac{4}{10}$.

4p **15** Toon dit aan. Je mag hierbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken.

3p **16** Toon met behulp van de verwachtingswaarde aan dat Renske met haar strategie per spel gemiddeld 6 euro zal verliezen.

Marlies heeft een andere strategie dan Renske. Nadat Marlies een kaart heeft omgedraaid, draait ze alleen een volgende kaart om als ze op verlies staat. Ook zij heeft een blaadje voor zich liggen. Zie figuur 7. Ook deze figuur staat op de uitwerkbijlage.

figuur 7



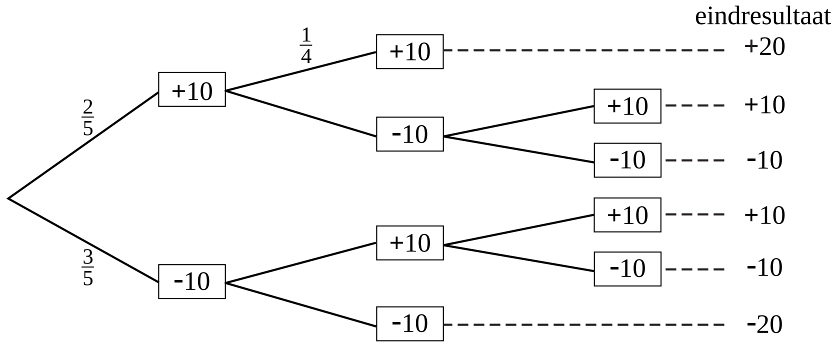
We vergelijken de strategie van Marlies met die van Renske. We weten dat Renske naar verwachting 6 euro per spel verliest. Om te onderzoeken of de strategie van Marlies beter is, kunnen we kijken of bij Marlies de verwachtingswaarde van het eindresultaat per spel hoger is.

6p **17** Onderzoek of de strategie van Marlies beter is. Je mag voor het berekenen van de kansen de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken.

uitwerkbijlage

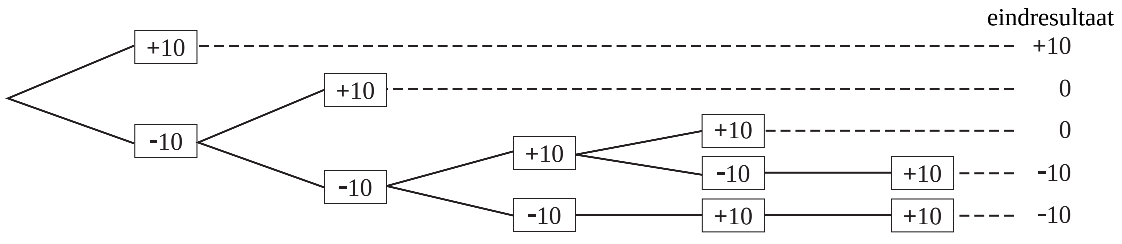
15

Renske



17

Marlies



Kookpunthoogtemeter

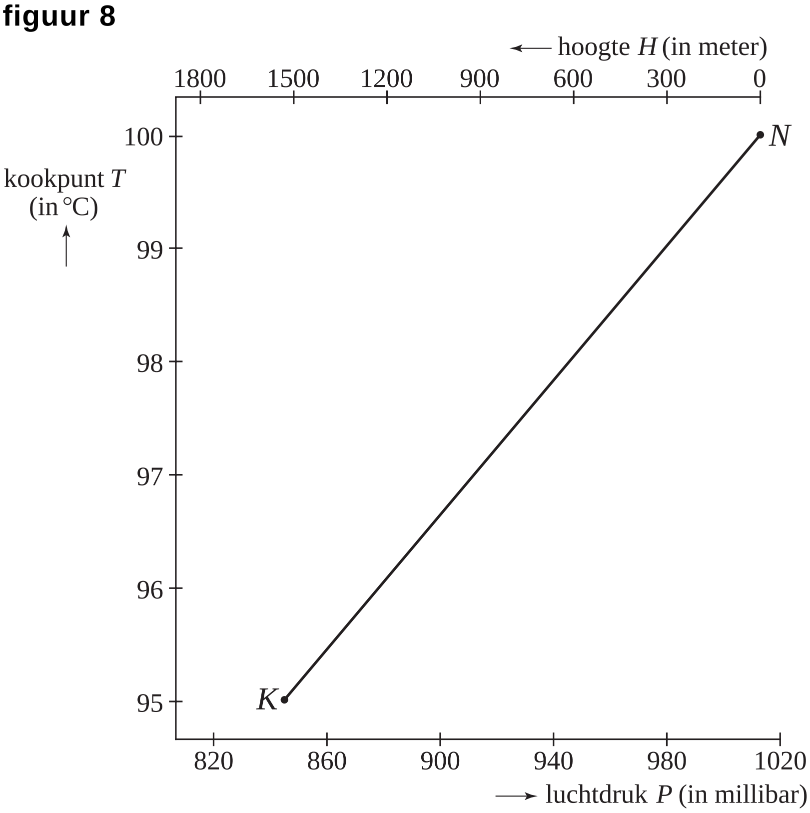
Voor bergbeklimmers is het belangrijk te weten op welke hoogte ze zich bevinden. Daarvoor gebruiken ze tegenwoordig hoogtemeters die de hoogte met behulp van de luchtdruk meten. Immers, hoe hoger je komt, hoe lager de luchtdruk.

Toen Francisco José de Caldas in 1791 het Andesgebergte overstak, was er geen hoogtemeter. Hij bedacht er zelf een: hij kookte water in een pannetje en mat de temperatuur op het moment dat het water begon te borrelen en kwam op die manier de hoogte te weten.

Op zeeniveau (op 0 meter hoogte) is de luchtdruk 1013 millibar en kookt water bij 100 °C. Kom je hoger, dan daalt de luchtdruk, maar gaat ook het kookpunt (de temperatuur waarbij water begint te borrelen) van water omlaag. Zo kookt water op de top van de Mount Everest (8850 meter) al rond de 70 °C. Het kookpunt van water is dus een maat voor de hoogte.

In figuur 8 zie je hoe de hoogte H, de luchtdruk P en het kookpunt T met elkaar samenhangen. De drie schaalverdelingen zijn lineair. Figuur 8 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 8



In figuur 8 is punt K getekend: bij een hoogte van 1530 meter is de luchtdruk 845 millibar en het kookpunt 95 °C. Ook punt N is getekend (H = 0 meter, P = 1013 millibar en T = 100 °C).

Thijs is op vakantie in de Duitse Eifel. Hij wil met de methode van De Caldas weten op welke hoogte hij zit. Hij kookt water en meet de temperatuur. Het water kookt bij 98,1 °C.

3p **18** Op welke hoogte zit Thijs? Geef in de figuur op de uitwerkbijlage aan hoe je aan je antwoord bent gekomen.

Tot 2 km hoogte gebruiken bergbeklimmers verschillende vuistregels.
Een vuistregel voor het verband tussen hoogte en luchtdruk is:

bij elke stijging van 100 meter neemt de luchtdruk met 11 millibar af

3p **19** Onderzoek of deze vuistregel in overeenstemming is met figuur 8.

Met behulp van figuur 8 kun je ook een vuistregel maken voor het verband tussen de hoogte en het kookpunt. Ook deze begint met: **bij elke stijging van 100 meter ...**

3p **20** Geef deze vuistregel. Licht je werkwijze toe.

In figuur 8 is duidelijk te zien dat er (tot een hoogte van 2 km) sprake is van een lineair verband tussen het kookpunt T en de luchtdruk P.

5p **21** Stel een formule op voor dit verband. Gebruik daarbij de punten K en N.

Het lineaire model dat hierboven gebruikt werd, is maar een benadering. In werkelijkheid is het verband tussen de luchtdruk en de hoogte exponentieel. Het is bekend dat boven op de Mount Everest (8850 meter) de luchtdruk nog maar een derde is van de luchtdruk op zeeniveau, dus zo'n 340 millibar. De eerder genoemde vuistregel geldt niet voor zulke grote hoogtes.

De exponentiële afname van de luchtdruk kunnen we beschrijven met de formule:

$$P = 1013 \cdot 0{,}988^h$$

Hierin is P de luchtdruk in millibar en h de hoogte in **honderden** meters.
Tot een hoogte van 2 km gebruikt men vaak voor het gemak, zoals ook uit de vuistregel bij vraag 19 blijkt, een lineair verband tussen de luchtdruk en de hoogte. Dit lineaire model wijkt dan niet veel af van het werkelijke exponentiële model. In punt K is volgens het lineaire model de luchtdruk 845 millibar.

3p **22** Bereken hoeveel procent die 845 afwijkt van de waarde in het punt K volgens de exponentiële formule.

uitwerkbijlage

18